

Svar och lösningsförslag till övningsks 3.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$ p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

	sant	falskt
a) $n!$ är antalet sätt att ordna n personer i en kö. [Ja, det är antalet sätt välja olika personer till de n platserna.]	×	
b) För alla $n, k \in \mathbb{N}$, $0 < k < n$, gäller $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. [Ja, det är rekursionsformeln för binomialtalen.]	×	
c) Antalet funktioner från $\{1, 2, 3\}$ till $\{a, b, c, d\}$ är 3^4 . [Nej, det är 4^3 .]		×
d) Om $A \cap B = \emptyset$ så gäller att $ A \cup B \cup C = A + B + C - B \cap C - A \cap C $. [Ja, ty också $A \cap B \cap C = \emptyset$ (inklusion och exklusion).]	×	
e) Om $\alpha, \beta, \sigma \in S_n$ (permutationerna av n element), $\sigma\alpha = \beta\sigma$ och α är en jämn permutation, måste också β vara jämn. [Ja, α och β är konjugerade, $\beta = \sigma\alpha\sigma^{-1}$.]	×	
f) $\pi \in S_{14}$ med $\pi = (1\ 7\ 3\ 4)(2\ 11\ 9)(5\ 13\ 10\ 8)(6\ 12)(14)$ (i cykelform) är en jämn permutation. [Nej, ett udda antal cykler av jämn längd, så udda.]		×

2a) (1p) Skriv permutationen φ som en produkt av disjunkta cykler,

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 6 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Lösning:

Eftersom $\varphi(1) = 2, \varphi(2) = 3, \varphi(3) = 5, \varphi(5) = 6$ o.s.v., får man

svaret: φ ges av $(1\ 2\ 3\ 5\ 6)(4\ 7)(8)$. Det kan också skrivas $(1\ 2\ 3\ 5\ 6)(4\ 7)$.

b) (1p) Redogör för postfacksprincipen (eng. the pigeonhole principle).

Lösning:

"Om k föremål fördelas i n lådor, $k > n$, får minst en låda minst två föremål.",
"Om $k > n$ finns ingen injektion från en k -mängd till en n -mängd." e.dyl.

c) (1p) Ange $S(6, 4)$.

Lösning:

Med rekursionen för stirlingtalen,

$$\begin{cases} S(n, k) = S(n-1, k-1) + k S(n-1, k), & 1 < k < n \\ S(n, 1) = S(n, n) = 1, \end{cases}$$

fås "Stirlings triangel":

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & & & \\ & & & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & 3 & & 1 \\ & & & 7 & & 6 & 1 \\ & & & & 25 & & 10 \\ & & & & & 65 & \end{array}$$

I fetstil står **svaret: $S(6, 4) = 65$.**

3) (3p) Sjutton identiska bullar fördelas på ett barnkalas så att inget av de tio barnen blir utan. På hur många olika sätt kan detta ske?

Lösning:

Då alla barn fått varsin bulle, återstår att fördela 7 stycken. Det kan ske på (7 positioner av $9 + 7 = 16$ blir bullar, övriga "mellanväggar") $\binom{16}{7} = \frac{16!}{7!9!}$ sätt.

Svar: Bullarna kan fördelas på $\frac{16!}{7!9!} (= 11440)$ sätt.

4) (3p) Låt $\varphi = (1\ 3\ 2\ 4\ 5)$ och $\gamma = (1\ 2\ 5)(3\ 4)$ vara permutationer på mängden $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Bestäm ordningen av permutationen $\varphi\gamma^2$.

Lösning:

$$\gamma^2 = (1\ 2\ 5)(3\ 4)(1\ 2\ 5)(3\ 4) = (1\ 5\ 2)(3)(4),$$

$$\text{så } \varphi\gamma^2 = (1\ 3\ 2\ 4\ 5)(1\ 5\ 2)(3)(4) = (1)(2\ 3)(4\ 5).$$

Permutationens ordning är minsta gemensamma multipeln till cykellängderna, så **svar: $\varphi\gamma^2$:s ordning är 2.**

5) (3p) Bestäm antalet tal mellan 1 och 900 som inte är delbara med något av talen 4 och 5.

Lösning:

Låt A vara $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 900, 4 \mid x\}$, mängden av heltal mellan 1 och 900 som är delbara med 4 och motsvarande $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 900, 5 \mid x\}$ de som är delbara med 5.

Vi söker antalet tal mellan 1 och 900 som inte ligger i $A \cup B$, dvs $900 - |A \cup B|$, vilket enligt principen om inklusion och exklusion är $900 - |A| - |B| + |A \cap B|$. Här är $|A|$, antalet tal mellan 1 och 900 som är delbara med 4, $\frac{900}{4} = 225$ (vart fjärde tal är delbart med 4). På samma sätt är $|B| = \frac{900}{5} = 180$ och $|A \cap B| = \frac{900}{20} = 45$ (både i A och B ligger precis tal som är delbara med 4 och 5, dvs med 20). Så det sökta antalet blir $900 - 225 - 180 + 45 = 540$.

Svar: 540 tal mellan 1 och 900 är varken delbara med 4 eller med 5.
