

Svar och lösningsförslag till övningsks 2.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$ p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

	sant	falskt
a) Endast om $B \subseteq A$ så gäller att $B \cap A = A$. [Nej, det senare betyder precis att $A \subseteq B$.]		×
b) Om en funktion $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ är både en injektion och en surjektion är den säkert inverterbar. [Javisst, den är en bijektion, så inverterbar.]	×	
c) $(A \setminus B)^c = B^c \setminus A^c$ gäller för alla mängder A och B . [Nejdå, alla B :s element ingår t.ex. i VL, inte i HL(=VL ^c).]		×
d) En anti-symmetrisk relation är alltid reflexiv, men inte säkert tvärtom. [Nej, t.ex. den tomma relationen är anti-symmetrisk, men inte reflexiv.]		×
e) Om f är en injektiv funktion från mängden A till mängden B och $ A = B < \infty$ så är f bijektiv. [Ja, den blir också surjektiv, så bijektiv.]	×	
f) De rationella talen är en uppräkneligt oändlig mängd. [Ja, ett standardexempel. Första boken sid. 256.]	×	

2a) (1p) Låt $\mathcal{P}(A)$ beteckna mängden av alla delmängder till en mängd A . Bestäm antalet element i $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$.

Lösning:

Mängden $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ har två element, så $2^2 = 4$ olika delmängder, boken sid. 87 (eller multiplikationsprincipen, sid. 115). De är $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Svar: 4 st.

b) (1p) Avgör för var och en av följande om det är ett **gaussiskt primtal** (dvs ett irreducibelt element i $\mathbb{Z}[i]$) eller inte: $5 + 2i$, $3 + i$, 13 , $5 - 12i$, 19 .

Lösning:

Gaussiska primtal: $5 + 2i$ (ty $|5 + 2i|^2 = 29$, ett primtal) och 19 (ty ett primtal och $\equiv_4 3$),

inte gaussiska primtal: $3 + i$ (ty $|3 + i|^2 = 10 = 2 \cdot 5$), $13 = (3 + 2i)(3 - 2i)$ och $5 - 12i$ (ty $|5 - 12i|^2 = 169 = 13^2$, $13 \equiv_4 1$).

c) (1p) Ange en bijektiv funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$, där $\mathbb{R}$ betecknar de reella talen.

Lösning:

"Bijektiv" betyder "surjektiv och injektiv". Ett enkelt exempel är $f(x) = x$.

3) (3p) $\mathcal{R}$ på $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ är sann för $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ precis om det finns en surjektion $f : A \rightarrow B$. Är $\mathcal{R}$ reflexiv, symmetrisk, anti-symmetrisk och/eller transitiv?

Lösning:

$\mathcal{R}$ är reflexiv, ty $\text{id}_A : A \rightarrow A$ är en surjektion för alla A . $\mathcal{R}$ är inte symmetrisk, ty det finns en surjektion $\{0, 1\} \rightarrow \{0\}$, men ingen åt andra hållet. Den är inte anti-symmetrisk, ty det finns surjektioner mellan $\{0\}$ och $\{1\}$, men de är olika mängder. Den är transitiv, ty om $f : A \rightarrow B$ och $g : B \rightarrow C$ är surjektioner, är $gf : A \rightarrow C$ en surjektion.

Svar: $\mathcal{R}$ är reflexiv och transitiv, men inte symmetrisk eller anti-symmetrisk.

4) (3p) Vi skall visa att om $X \neq \emptyset$ har $f : X \rightarrow Y$ en vänsterinvers, dvs $g : Y \rightarrow X$ med $g(f(x)) = x$, om och endast om f är injektiv.

Lösning:

"Endast om": Låt $gf = \text{id}_X$. Om $f(x_1) = f(x_2)$, $x_i \in X$ är $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$, så f är injektiv.

"Om": Låt f vara injektiv och välj ett element $a \in X (\neq \emptyset)$. Om $y \in Y$ uppfyller $y = f(x)$ för något $x \in X$, låt $g(y) = x$. Eftersom f är injektiv finns högst ett sådant x . Om $y \neq f(x)$ för alla $x \in X$, låt $g(y) = a$. Då blir $g(f(x)) = x$ för alla $x \in X$.

Saken är klar.

5) (3p) Använd induktion för att visa att formeln $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ gäller för alla $n = 1, 2, 3, \dots$

Lösning:

Bas: $\text{VL}_1 = 1$, $\text{HL}_1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$. Påståendet stämmer för $n = 1$.

Steg: Antag $\text{VL}_n = \text{HL}_n$,
då $\text{VL}_{n+1} = 1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \text{VL}_n + (n+1) =$
 $\text{HL}_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$
 $(n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \text{HL}_{n+1}$

Så $\text{VL}_1 = \text{HL}_1$ och $\text{VL}_n = \text{HL}_n \Rightarrow \text{VL}_{n+1} = \text{HL}_{n+1}$ för $n = 1, 2, \dots$

Enligt induktionsprincipen gäller påståendet för $n = 1, 2, \dots$
