

Svar och lösningsförslag till övningsks 1.

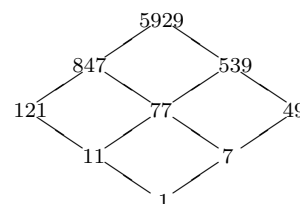
1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$ p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

	sant	falskt
a) $(123)_6 + (433)_6 = (1000)_6$ ($(abc)_6$ är talet som skrivs abc i bas 6.). [Ja. Räkna i bas 6 eller i bas 10: $51 + 165 = 216$.]	×	
b) $\text{sgd}(a, 2a) = a$ för alla positiva heltal a . [Javisst, a är en gemensam delare och större finns inte.]	×	
c) Om p_1 och p_2 är primtal kan $p_1 + p_2$ inte vara ett primtal. [Jodå, t.ex. $2 + 3 = 5$.]		×
d) Det finns precis sex inverterbara element i $\mathbb{Z}_7$. [Ja, alla $1, 2, 3, 4, 5, 6$ är inverterbara, ty 7 är ett primtal.]	×	
e) Det finns unika heltal x, y så att $ax + by = c$ om och endast om $\text{sgd}(a, b) \mid c$. [Nej, lösningen är inte unik.]		×
f) Alla gemensamma delare till a och b kan skrivas $ma + nb$ med m, n heltal. [Nej, t.ex. är $1 \neq m \cdot 4 + n \cdot 6$ för alla m, n .]		×

2a) (1p) Rita **delargrafen** för talet $5929 (= 7^2 \cdot 11^2)$.

Lösning:

Se figuren t.h. ($7 \cdot 11^2 = 847$, $7^2 \cdot 11 = 539$ etc.)



b) (1p) Ange det element i $\mathbb{Z}_7$ som är lika med elementet $5(2 + 3) + 4$.

Lösning:

$5(2 + 3) + 4 \equiv 5 \cdot 5 + 4 \equiv 4 + 4 \equiv 1 \pmod{7}$, dvs i $\mathbb{Z}_7$. **Svar: 1.**

c) (1p) Vi får veta att $762 \cdot 83 = 63246$ och $139 \cdot 455 = 63245$.
Vilken av $0, 1, 2, \dots, 761$ är 455^{-1} i $\mathbb{Z}_{762}$?

Lösning:

$-139 \cdot 455 + 83 \cdot 762 = 1$, så $455^{-1} = -139 = 762 - 139 = 623$ i $\mathbb{Z}_{762}$.

Svar: $455^{-1} = 623$ i $\mathbb{Z}_{762}$.

3) (3p) beräkna den minsta gemensamma multipeln till de bägge talen 420 och 1188.

Lösning:

Euklides algoritm:

$$1188 = 2 \cdot 420 + 348$$

$$420 = 1 \cdot 348 + 72$$

$$348 = 4 \cdot 72 + 60$$

$$72 = 1 \cdot 60 + 12$$

$$60 = 5 \cdot 12 + 0,$$

$$\text{så } \text{sgd}(420, 1188) = 12 \text{ och}$$

$$\text{mgm}(420, 1188) = \frac{420 \cdot 1188}{\text{sgd}(420, 1188)} = \frac{420 \cdot 1188}{12} =$$

$$420 \cdot 99 = 42000 - 420 = 41580.$$

Svar: $\text{mgm}(420, 1188) = 41580$

4) (3p) Bestäm inversen till elementet 12 i ringen $\mathbb{Z}_{31}$.

Lösning:

Euklides algoritm igen:

$$31 = 2 \cdot 12 + 7$$

$$12 = 1 \cdot 7 + 5$$

$$7 = 1 \cdot 5 + 2$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1,$$

$$\text{så } 1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2(7 - 5) = -2 \cdot 7 + 3 \cdot 5 =$$

$$= -2 \cdot 7 + 3(12 - 7) = 3 \cdot 12 - 5 \cdot 7 =$$

$$= 3 \cdot 12 - 5(31 - 2 \cdot 12) = -5 \cdot 31 + 13 \cdot 12$$

$$\text{och } 13 \cdot 12 \equiv 1 \pmod{31}, \text{ dvs}$$

Svar: $12^{-1} = 13$ i $\mathbb{Z}_{31}$

5) (3p) Visa att $\log_3 11$ inte är ett rationellt tal, dvs att det inte finns heltal m, n så att $\log_3 11 = \frac{m}{n}$. Som bekant är $3^{\log_3 11} = 11$.

Lösning:

För att få en motsägelse antar vi att $\log_3 11 = \frac{m}{n}$. Då är $11 = 3^{\log_3 11} = 3^{\frac{m}{n}}$ och $11^n = (3^{\frac{m}{n}})^n = 3^m$, vilket är omöjligt eftersom 3 och 11 är primtal och faktorisering i primtal, bortsett från ordningen, är entydig (och vi inte kan ha $m = n = 0$). **Saken är klar.**
