

Svar till övning 12, den 25 maj 2012

1. T.ex. $\{a_1b_2, a_2b_1, a_3b_5, a_4b_4, a_5b_3\}$.
2. Utgående från a_5 finner man de utökande alternerande stigarna $a_5b_3a_1b_2$, $a_5b_4a_4b_2$ och $a_5b_4a_4b_1a_2b_2$. De leder alla till större, dvs fullständiga, matchningar. Den första ger den fullständiga matchningen i svaret till förra uppgiften.
3. Utgående från a_1 finner man tre olika utökande alternerande stigar, den kortaste är $a_1b_3a_3b_5$ och den längsta är en hamiltonstig från a_1 till b_5 . Den kortaste ger den fullständiga matchningen $\{a_1b_3, a_2b_1, a_3b_5, a_4b_2, a_5b_4\}$.
4. Tydligen måste den andra mängden representeras av 2, så den fjärde av 4 osv. Man får (entydigt) de olika representanterna (i ordning): 1,2,3,4,5. Halls sats ger att de senare mängderna saknar transversal, ty unionen av de 3 första, $\{1\} \cup \{1, 3\} \cup \{1, 3\} = \{1, 3\}$, har bara 2 element.
5. Vi skall visa att det finns en fullständig matchning i den bipartita grafen med elever och böcker som hörn och kanter från elever till de böcker de vill läsa. Från varje delmängd A av eleverna med $|A| = m$, går minst mk kanter, alla till $P(A)$. Men om $|P(A)| \leq m - 1$ kan den "ta emot" högst $(m - 1)k$ kanter. Så $|P(A)| \geq m$. Enligt Halls sats finns en fullständig matchning.
6. Det gäller att visa att det finns en fullständig matchning i den bipartita grafen med tentander och uppgifter som hörn och kanter precis då tentanden klarat uppgiften. Tag en delmängd A till tentanderna. Om $A \neq \emptyset$ är $|P(A)| \geq 4$ (varje tentand klarade minst 4 uppgifter) och om $|A| > 4$ är $|P(A)| = 10$ (varje uppgift klarades av minst 6 tentander, så någon i A). Halls sats ger resultatet.
7. Betrakta den bipartita grafen med A_i :na som X -hörn och B_j :na som Y -hörn och en kant mellan A_i och B_j precis om $A_i \cap B_j \neq \emptyset$. Halls sats. En fullständig matchning i den grafen motsvarar en gemensam transversal.