

Exempel för övning 12, den 25 maj 2012

1. Finn en fullständig matchning i den bipartita graf som består av hörnmängderna $X = \{a_1, a_2, \dots, a_5\}$ och $Y = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_5\}$ och kantmängden $E = \{a_1b_2, a_1b_3, a_2b_1, a_2b_2, a_2b_4, a_3b_3, a_3b_5, a_4b_1, a_4b_2, a_4b_4, a_5b_3, a_5b_4\}$.

a_1b_2 etc står förstås för $\{a_1, b_2\}$ etc.

2. Betrakta samma bipartita graf som i föregående uppgift. Betrakta matchningen $M = \{a_1b_3, a_2b_1, a_3b_5, a_4b_4\}$ och finn en alternerande stig till M . Använd denna alternerande stig till att göra matchningen större.

3. Samma uppgift men med $M = \{a_2b_1, a_3b_3, a_4b_2, a_5b_4\}$.

4. Bestäm en **transversal** (i boken kallad "ett system av distinkta representanter") till mängderna $\{1, 2, 3\}$, $\{2\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 4\}$, $\{4, 5\}$ och förklara varför det inte finns någon transversal till mängderna $\{1\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$.

5. Eleverna i en klass skall låna böcker. Visa att om varje elev vill läsa minst $k (\geq 1)$ stycken av de tillgängliga böckerna och det för varje bok finns högst k stycken elever som vill läsa den, så kan varje elev låna en egen bok som den vill läsa.

6. Tio tentander har gjort en tentamen med tio uppgifter. Varje uppgift klarades av minst sex skrivande. Varje skrivande klarade minst fyra uppgifter. Visa att man kan fördela uppgifterna med en per tentand, så att var och en har klarat sin uppgift.

7. Låt $\{A_i\}_{i=1}^n$ och $\{B_i\}_{i=1}^n$ vara två **partitioner** av mängden X (som vi minns betyder det precis att $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$ och att $A_i \cap A_j = \emptyset$ om $i \neq j$, motsvarande för B_j :na).

Visa att det finns en **gemensam transversal** (gemensamma distinkta representanter), dvs en mängd Y med $|Y| = n$ och $|Y \cap A_i| = |Y \cap B_i| = 1$ för alla $i = 1, 2, \dots, n$, om och endast om det inte för något k , $1 \leq k \leq n-1$, finns k stycken av A_i :na som alla är delmängder till unionen av färre än k av B_j :na.