

Svar till övning 11, den 16 maj 2012

1. Det finns 11 stycken olika.
2. Grafen är en skog, så varje komponent är ett träd (sammanhängande och acyklisk) och har därför 1 hörn mer än kanter. Med n komponenter blir det n fler hörn, så antalet komponenter är 43.
3. Rita (om man t.ex. ritar K_4 som en tetraeder uppifrån, kan det femte hörnet var det än placeras förbindas med 3 hörn).
4. $v - e + r = 2$ (Euler) och $4v = \sum_{x \in V} \delta(x) = 2e = 2 \cdot 16$, så $r = 2 - v + e = 2 - 8 + 16 = 10$.
5. Låt en plan version av grafen ha r ytor. Då gäller (som i 10.) $v - e + r = 2$ och $kr \leq 2e$, så $2 \leq v - e + \frac{2}{k}e = v - \frac{k-2}{k}e$, som ger $e \leq \frac{k}{k-2}(v - 2)$. Petersens graf har $v = 10$, $e = 15$ och $k = 5$. (Den blir inte planär ens om man tar bort en kant, eller om man tar bort ett hörn och dess kanter.) Om man tar bort hörn a och dess kanter och suddar ut b, e, f (och gör deras två kanter till en) är den uppkomna grafen bipartit, med hörnmängder $X = \{c, i, j\}$ och $Y = \{d, g, h\}$. Alla hörn i X är grannar med alla i Y , så grafen är isomorf med $K_{3,3}$. Kuratowskis sats ger att Petersens graf inte är planär. Om man kontraherar kanterna af, bg, ch, di, ej fås en graf som är isomorf med K_5 . Wagners sats ger att Petersens graf inte är planär. Eftersom suddandet av ett hörn kan uppfattas som en kontraktion av en kant, kan samma konstruktion som ovan också användas för att visa att Wagners sats ger att Petersens graf inte är planär. Däremot kan man inte få K_5 för Kuratowskis sats (eftersom operationerna där inte kan öka valensen för ett hörn).
6. 12 hörn och 11 ytor ger $e = 12 + 11 - 2 = 21$ kanter. Låt det finnas x hörn med valens 3 (så $12 - x$ hörn med valens 5). Då fås $3x + 5(12 - x) = 2e = 42$, så $x = 9$. Alltså 9 hörn med valens 3 och 3 hörn med valens 5.
7. Låt x, y vara antalen ytor med 4 respektive 6 kanter. Då gäller $v - e + (x + y) = 2$ och $3v = 2e = 4x + 6y$. De ger $x = 6$, medan v, e och y inte bestäms entydigt. Det finns alltså 6 ytor med 4 kanter.
8. Kalla hörnen 000,001,...,111 (xyz-koordinater för hörnen). Grannar är hörn vars koordinater skiljer i precis en position. Grafen är bipartit och en 2-färgning får man genom att ordna hörnen så att alla (utom det första) är granne med något tidigare, t.ex. 000,001,010,011,100,101,110,111. För att få fler färger tar man ordningar som ger fel färg till det andra hörnet etc.
3-färgning med t.ex. 000,111,001,010,011,100,101,110 och
4-färgning med t.ex. 000,111,001,110,010,011,100,101.
- 9*. Betrakta alla färgningar av hörnen i G med två färger. Bland dem finns en med det minsta antalet "kollisioner" (dvs enfärgade kanter). En sådan färgning löser problemet, ty om ett hörn hade samma färg som mer än hälften av sina grannar, skulle det bli färre kollisioner om det bytte färg.

10*. Låt i en minimal färgning av G n_i st hörn ha färg $i = 1, \dots, \chi(G)$. Alla hörn som har samma färg i G måste ha olika färg i $\overline{G}$, så $n_i \leq \chi(\overline{G})$, alla i . Därmed $n = n_1 + n_2 + \dots + n_{\chi(G)} \leq \chi(\overline{G}) + \dots + \chi(\overline{G}) = \chi(G) \cdot \chi(\overline{G})$.

11. Kalla hörnen (i ordning) 1,2,3,4,5. 1 kan färgas på λ sätt. För vart och ett av dessa fås två fall, om 2 och 5 har samma eller olika färger. I det senare fallet kan 3 ha samma färg som 5 eller inte. Man får $P_G(\lambda) = \lambda((\lambda-1)^2(\lambda-2) + (\lambda-1)(\lambda-2)((\lambda-1) + (\lambda-2)^2)) = \dots = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = (\lambda-1)^5 - (\lambda-1)$.

Med rekursionsformeln, $P_{C_5}(\lambda) = P_{T_5}(\lambda) - P_{C_4}(\lambda) = P_{T_5}(\lambda) - (P_{T_4}(\lambda) - P_{C_3}(\lambda)) = \lambda(\lambda-1)^4 - \lambda(\lambda-1)^3 + \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) = \dots = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)((\lambda-1)^2 + 1)$. (T_n är ett träd med n hörn.)

12. Att de två högstgradstermerna är $\lambda^n - |E|\lambda^{n-1}$ visas med rekursionsformeln för $P_G(\lambda)$ och induktion över antalet kanter.

13. För var och en av de $P_{G_1}(\lambda)$ st färgningarna av G_1 finns det $\frac{P_{G_2}(\lambda)}{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-m+1)}$ färgningar av G_2 som fortsätter den. $P_{G_2}(\lambda)$ är ju nämligen $\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-m+1) \cdot (\text{antalet sätt färga } G_2 \text{ med givna (olika) färger för hörnen i } V_1 \cap V_2)$.

$P_G(\lambda) = \frac{P_{C_3}(\lambda)^3}{\lambda \cdot \lambda(\lambda-1)} = \lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)^3$. (Fås också med kombinatoriskt resonemang.)