

Exempel för övning 11, den 16 maj 2012

1. Rita alla (icke-isomorfa) träd med 7 hörn.
2. En acyklisk graf, dvs en graf som saknar cykler, består av 143 hörn och 100 kanter. Hur många komponenter består grafen av?
3. Tas en kant bort från K_5 blir den så erhållna grafen planär. Visa det.
4. Antag att G är en sammanhängande 4-reguljär graf som dessutom är planär. Hur många ytor har en plan ritning av G om G har 16 kanter?
5. Visa att om samtliga cykler i den planära sammanhängande grafen G har längd minst $k \geq 3$ så gäller att

$$e \leq \frac{k}{k-2}(v-2).$$

Använd sedan detta för att visa att den s k Petersens graf, med grannlista

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	
b	a	b	c	a	a	b	c	d	e	inte är planär.
e	c	d	e	d	h	i	f	f	g	(Ett åskådligt sätt att rita grafen är som en
f	g	h	i	j	i	j	j	g	h	femhörning med hörn i ordningen $abcde$ och
										innanför dem deras respektive grannar $fghij$
										(som blir spetsar i en inre stjärna).)

Visa också med hjälp av dels Kuratowskis och dels Wagners sats (se planaritetsstencilen) att grafen inte är planär.

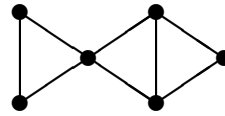
6. I en sammanhängande plan graf har alla hörn valens 3 eller 5. Antalet hörn är 12 och antalet ytor är 11. Hur många hörn har valens 3 och hur många har valens 5?
7. I en 3-reguljär, plan, sammanhängande graf har alla ytor antingen 4 eller 6 kanter (också den obegränsade ytan). Hur många ytor har 4 kanter?
8. Finn ordningar mellan hörnen i kubgrafen (som har hörn svarande mot kubens hörn och kanter mot dess kanter), så att den giriga algoritmen för att färga hörnen använder 2, 3 respektive 4 färger.
- 9*. Låt $G = (V, E)$ vara en graf. Visa att hörnen i V kan färgas med högst två färger, så att varje hörn har samma färg som högst hälften av sina grannar.
- 10*. Visa att om grafen G har n hörn och $\bar{G}$ är komplementgrafen till G , så gäller $\chi(G) \cdot \chi(\bar{G}) \geq n$. $\chi(G)$ är förstås det kromatiska talet för G .
11. Bestäm det kromatiska polynomet $P_{C_5}(\lambda)$ för den cykliska grafen C_5 , med kombinatoriskt resonemang ("fall för fall") eller med rekursionsformeln för kromatiska polynom. Jämför med det allmänna uttrycket som härleddes på föreläsningen, $P_{C_n}(\lambda) = (\lambda-1)^n + (-1)^n(\lambda-1)$.
12. Visa att koefficienten för λ^{n-1} i det kromatiska polynomet $P_G(\lambda)$ är $-|E|$. n är antalet hörn i G .

13. Låt grafen $G = (V, E)$ vara graferna $G_1 = (V_1, E_1)$ och $G_2 = (V_2, E_2)$ ”hopklustrade längs en K_m ”, dvs $V = V_1 \cup V_2$, $E = E_1 \cup E_2$ och $(V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$ är en graf som är isomorf med den fullständiga grafen K_m .

Visa att det kromatiska polynomet $P_G(\lambda)$ ges av

$$P_G(\lambda) = \frac{P_{G_1}(\lambda) \cdot P_{G_2}(\lambda)}{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-m+1)}.$$

Illustrera med $P_G(\lambda)$ för grafen G här till höger.



14.** (Planeras gås igenom sista föreläsningen.) A och B utför en kortkonst på följande sätt. A får fem kort som slumpvis dragits ur en kortlek, tittar på dem och visar sedan fyra av dem efter varandra. B, som inte sett det femte kortet, talar då om vilket det är.

Hur bär de sig åt?