Svar till övning 9, den 23 april 2012

1a. $G_1 = (\mathbb{Z}_8, +)$:

$+$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	0
2	2	3	4	5	6	7	0	1
3	3	4	5	6	7	0	1	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	6	7	0	1	2	3	4
6	6	7	0	1	2	3	4	5
7	7	0	1	2	3	4	5	6

$G_2 = (U(\mathbb{Z}_{15}), \cdot)$:

$\cdot$	1	2	4	7	8	11	13	14
1	1	2	4	7	8	11	13	14
2	2	4	8	14	1	7	11	13
4	4	8	1	13	2	14	7	11
7	7	14	13	4	11	2	1	8
8	8	1	2	11	4	13	14	7
11	11	7	14	2	13	1	8	4
13	13	11	7	1	14	8	4	2
14	14	13	11	8	7	4	2	1

b. Grupper av ordning 8, så element kan ha ordning 1, 2, 4 och 8. Man finner
för G_1 : $o(0) = 1$, $o(4) = 2$, $o(2) = o(6) = 4$, $o(1) = o(3) = o(5) = o(7) = 8$,
för G_2 : $o(1) = 1$, $o(4) = o(11) = o(14) = 2$, $o(2) = o(4) = o(7) = o(13) = 4$.

c. Cykliska delgrupper genereras av elementen,
i G_1 : $\langle 0\rangle = \{0\}$ med sidoklasser $\{g\}$, $g \in G_1$;
$\langle 4\rangle = \{0, 4\}$ med $\{0, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 7\}$;
$\langle 2\rangle = \langle 6\rangle = \{0, 2, 4, 6\}$ med $\{0, 2, 4, 6\}, \{1, 3, 5, 7\}$;
$\langle 1\rangle = \langle 3\rangle = \langle 5\rangle = \langle 7\rangle = G_1$ med G_1 som enda sidoklass.
i G_2 : $\langle 1\rangle = \{1\}$ med sidoklasser $\{g\}$, $g \in G_2$;
$\langle 4\rangle = \{1, 4\}$ med $\{1, 4\}, \{2, 8\}, \{7, 13\}, \{11, 14\}$;
$\langle 11\rangle = \{1, 11\}$ med $\{1, 11\}, \{2, 7\}, \{4, 14\}, \{8, 13\}$;
$\langle 14\rangle = \{1, 14\}$ med $\{1, 14\}, \{2, 13\}, \{4, 11\}, \{7, 8\}$;
$\langle 2\rangle = \langle 8\rangle = \{1, 2, 4, 8\}$ med $\{1, 2, 4, 8\}, \{7, 11, 13, 14\}$;
$\langle 7\rangle = \langle 13\rangle = \{1, 4, 7, 13\}$ med $\{1, 4, 7, 13\}, \{2, 8, 11, 14\}$.

d. En (del)grupp H är cyklisk omm det finns $h \in H$ med $o(h) = |H|$.
Alla delgrupper av ordning 1 och 2 är cykliska, så de enda möjliga icke-cykliska delgrupperna är av ordning 4, med alla element av ordning 1 eller 2, eller av ordning 8 (dvs hela gruppen), om inget element har ordning 8. Utöver dem i c. finner man delgrupperna,
i G_1: inga andra,
i G_2 : $\{1, 4, 11, 14\}$ med sidoklasser $\{1, 4, 11, 14\}, \{2, 7, 8, 13\}$;
G_2 med G_2 som enda sidoklass.

e. G_1 är cyklisk, men inte G_2.

2. $|U(\mathbb{Z}_{64})| = 32$.

3a. $(g_1, g_2)^k = (1, 1)$ omm $m_{1,2} \mid k$, så $o((g_1, g_2)) = \text{mgm}(o(g_1), o(g_2))$.

b. $\mathbb{Z}_{mn}$ är cyklisk (ty $o(1) = mn$) och isomorf med $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ omm det finns $g \in \mathbb{Z}_m$, $h \in \mathbb{Z}_n$ med $\text{mgm}(o(g), o(h)) = mn$, dvs omm $\text{mgm}(m, n) = mn$ (ty $o(g) \mid m$, $o(h) \mid n$, $o(1) = m$ resp. n), dvs $\text{sgd}(m, n) = 1$.

c. Ja, $\phi((g_1, g_2)) = (g_2, g_1)$ är en isomorfi.

d. Ja, verifiera att $H_1 \times H_2$ är $\neq \varnothing$, sluten under $\circ$ och ${}^{-1}$.

e. $G_1 \times \{1\} = \{(g_1, 1) \mid g_1 \in G_1\}$ är en normal delgrupp till $G_1 \times G_2$.

4. $39, 40 \,\big|\, |G|$, så $m = 39 \cdot 40 = 1560$. G kan vara $(\mathbb{Z}_{1560}, +)$.

5. a vore identitetselementet, så $o(b)$ vore 2. Omöjligt, ty $|G|$ är udda.

6a. Rotationsaxlar och speglingsplan nedan går genom tetraederns tyngdpunkt.

Typ	Antal	Paritet	Exempel	Stel avbildning av rummet
$[1^4]$	1	jämn	$id = (1)$	identitetsavbildningen
$[1^2 2]$	6	udda	$(1\,2)$	spegling i ett plan innehållande kanten 34
$[2^2]$	3	jämna	$(1\,2)(3\,4)$	rotation π kring en axel genom 12:s och 34:s mittpunkter
$[13]$	8	jämna	$(1\,2\,3)$	rotation $\pm\frac{2\pi}{3}$ kring en axel genom 4
$[4]$	6	udda	$(1\,2\,3\,4)$	rotation $\pm\frac{\pi}{2}$ kring en axel genom 13:s och 24:s mittpunkter, följt av en spegling i ett plan vinkelrätt mot axeln

b. Jämna permutationer svarar mot rotationer, udda mot avbildningar som innehåller (ett udda antal) speglingar.

c. N är (ändlig och) sluten under gruppoperationen, alltså en delgrupp.

$(1\,2)\,N = \{(1\,2), (3\,4), (1\,3\,2\,4), (1\,4\,2\,3)\} = N\,(1\,2)$

$(1\,3)\,N = \{(1\,3), (2\,4), (1\,2\,3\,4), (1\,4\,3\,2)\} = N\,(1\,3)$

$(1\,4)\,N = \{(1\,4), (2\,3), (1\,2\,4\,3), (1\,3\,4\,2)\} = N\,(1\,4)$

$(1\,2\,3)\,N = \{(1\,2\,3), (1\,3\,4), (1\,4\,2), (2\,4\,3)\} = N\,(1\,2\,3)$

$(1\,3\,2)\,N = \{(1\,3\,2), (1\,4\,3), (1\,2\,4), (2\,3\,4)\} = N\,(1\,3\,2)$

Alla vänstersidoklasser är alltså högersidoklasser (också N själv, förstås), så N är en normal delgrupp.

(Att N är normal följer också av att $gNg^{-1} = \{gng^{-1} \mid n \in N\}$ och N består av hela konjugatklasser ($[1^4]$ och $[2^2]$) av element i G.)

Eftersom operationen i kvotgruppen G/N ges av $(g_1N)(g_2N) = (g_1g_2)N$ och varje sidoklass innehåller precis en permutation π med $\pi(4) = 4$, är G/N isomorf med gruppen av dem, så med S_3, $G/N \approx S_3$.