Svar till övning 8, den 13 april 2012

1a. I cykelform fås $\pi = (1\;7\;2)\,(3\;6\;9\;8)\,(4\;5)$, så $o(\pi) = \mathrm{mgm}(3, 4, 2) = 12$.
b. En cykel $(x_1\;x_2\ldots x_k)$ kan skrivas $(x_1\;x_k)(x_1\;x_{k-1})\ldots(x_1\;x_2)$, så man får (bland andra möjligheter) med π enligt ovan att
$\pi = (1\;7\;2)\,(3\;6\;9\;8)\,(4\;5) = (1\;2)\,(1\;7)\,(3\;8)\,(3\;9)\,(3\;6)\,(4\;5)$.
Eftersom antalet transpositioner är jämnt, är π en jämn permutation. Det ses också av att antalet cykler av jämn längd (2 st) är jämnt och av att "n" (9) − antalet cykler (3) är jämnt.
2. $\chi = \pi^{-1}\sigma = (1\;2\;7)\,(3\;8\;9\;6)\,(4\;5)\,(1\;5\;3\;9\;6\;8)\,(2\;4) = (1\;4\;7)\,(2\;5\;8)\,(3\;6\;9)$,
$\psi = \sigma\pi^{-1} = (1\;5\;3\;9\;6\;8)\,(2\;4)\,(1\;2\;7)\,(3\;8\;9\;6)\,(4\;5) = (1\;4\;3)\,(2\;7\;5)\,(6\;9\;8)$.
Bara χ och ψ har samma cykelstruktur (lika många cykler av varje längd), så bara de är konjugerade (eftersom $\psi = \sigma\pi^{-1} = \pi\chi\pi^{-1}$).
σ innehåller 2 udda cykler (cykler av jämn längd), så den är en jämn permutation. π är jämn, så det är π^{-1} också, liksom $\chi = \pi^{-1}\sigma$ och $\psi = \sigma\pi^{-1}$.
3. $ac = c = 1c$, så a är identitetselementet. Det ger första raden och första kolumnen. Sedan används att tabellen är en latinsk kvadrat (dvs varje element finns precis en gång i varje rad och kolumn). Tabellen blir:

$*$	a	b	c	d	f	g
a	a	b	c	d	f	g
b	b	a	g	f	d	c
c	c	f	a	g	b	d
d	d	g	f	a	c	b
f	f	c	d	b	g	a
g	g	d	b	c	a	f

a. Nej b. a
c. $a^{-1}=a,\ b^{-1}=b,\ c^{-1}=c,\ d^{-1}=d,$
$f^{-1}=g,\ g^{-1}=f$
d. Ordingarna är $o(a)=1$, $o(b)=o(c)=o(d)=2$, $o(f)=o(g)=3$ e. c
4a. $ax^2 = b$ ger $ax^3 = bx$, så (med $x^3 = 1$) $a = bx$ och $x = b^{-1}a$
b. $bx = (xax)^3 = xax^2ax^2ax = xa(xa)^{-1}(xa)^{-1}x = (xa)^{-1}x$
(ty $x^2a = (xa)^{-1}$), så $b = (xa)^{-1}$ och $xa = b^{-1}$ och $x = b^{-1}a^{-1}(= (ab)^{-1})$.
c. $bac = a^{-1}$ ger $baca = 1$, så $aca = b^{-1},\ acab = 1,\ cab = a^{-1}$.
d. $(abc)^{-1} = abc$ ger $abcabc = 1$, så $bcabc = a^{-1},\ bcabca = 1,\ (bca)^{-1} = bca$.
e. $a^3 = 1$ ger $a = 1a = a^3a = (a^2)^2$.
f. $b^2ab = a^{-1}$ ger $ba = b^{-1}a^{-1}b^{-1}$, så $(ba)^3 = b^{-1}a^{-1}b^{-1}baba = 1a = a$.
(Alt. $b^2ab = a^{-1}$ ger $b^2aba = 1$, så $babab = b^{-1}b^2abab = 1$ och $(ba)^3 = a$.)
5. $(U(\mathbb{Z}_8), \cdot) = (\{1, 3, 5, 7\}, \cdot)$ är **inte** cyklisk, ty $o(1)=1$, $o(3)=o(5)=o(7)=2$,
$(U(\mathbb{Z}_{14}), \cdot) = (\{1, 3, 5, 9, 11, 13\}, \cdot) = \langle 3\rangle = \langle 5\rangle$ är cyklisk.
6. Man finner ordningarna:

π	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$o(\pi)$	1	12	3	6	4	12	12	4	3	6	12	2

så generatorerna (elementen med $o(g) = |G|$) är 2, 6, 7, 11.
(Vi kommer snart att se att för en grupp av ordning 12 är alla element g med $g^4, g^6 \neq 1$ generatorer. Det förenklar sökandet.)