

Exempel för övning 7, den 28 mars 2012

1. Hur många omkastningar av A, B, D, G, J, U som varken innehåller DU eller JAG finns det?

2. Finn arean för en sfärisk triangel med vinklarna α, β, γ på en sfär med radie R . En sfärisk triangel har delar av tre storcirkelar som sidor och en sfär med radie R har arean $4\pi R^2$.

3. I en familj bestående av 4 personer förekommer alla de sju dödssynderna (högmot, girighet, vällust, avund, frosseri, vrede och lättja). Varje person hemfaller tyvärr åt minst en av synderna, men dessbättre förekommer ingen av synderna hos mer än en av dem.

a. På hur många sätt kan synderna vara fördelade?

b. Hur många fördelningar är möjliga om ingen hemfaller åt både girighet och lättja?

4. På hur många sätt kan 7 kulor fördelas på 4 lådor i följande fall?

a. Särskiljbara kulor, särskiljbara lådor, lådor får vara tomma.

b. Särskiljbara kulor, särskiljbara lådor, lådor får inte vara tomma.

c. Identiska kulor, särskiljbara lådor, lådor får vara tomma.

d. Identiska kulor, särskiljbara lådor, lådor får inte vara tomma.

e. Särskiljbara kulor, identiska lådor, lådor får vara tomma.

f. Särskiljbara kulor, identiska lådor, lådor får inte vara tomma.

5. Visa att för stirlingtal (av andra slaget) gäller

$$S(n, 2) = 2^{n-1} - 1 \quad \text{och} \quad S(n, n-1) = \binom{n}{2}.$$

6. Låt φ och ψ beteckna nedanstående permutationer (givna på tvåradsform) på mängden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 8 & 5 & 2 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 1 & 2 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

a. Skriv permutationerna φ och ψ som produkter av disjunkta cykler.

b. Beräkna $\varphi\psi$, $\psi\varphi$, φ^{-1} och ψ^{-1} , dels på tvåradsform och dels på cykelform.

7. Se nästa sida.

7. 12 kort ligger ordnade rektangulärt, i 4 rader och 3 kolumner. Korten plockas upp radvis och läggs sedan ut kolumnvis i samma ordning, så att korten flyttas som i figuren.

$$\begin{array}{ccc}
 1 & 2 & 3 \\
 4 & 5 & 6 \\
 7 & 8 & 9 \\
 10 & 11 & 12
 \end{array}
 \longmapsto
 \begin{array}{ccc}
 1 & 5 & 9 \\
 2 & 6 & 10 \\
 3 & 7 & 11 \\
 4 & 8 & 12
 \end{array}$$

a. Efter hur många upprepningar av detta är alla kort åter i utgångsläget?

Numrera positionerna som till vänster och beskriv operationen med $\pi \in S_{12}$, där $\pi(i) = j$ betyder att kortet i position i hamnar i position j (dvs $\pi(1) = 1$, $\pi(2) = 4, \dots$).

b. Numrera i stället positionerna $0, 1, 2, \dots, 11$ och visa hur permutationen kan beskrivas med modulatorräkning.

c. Vilket villkor bestämmer antalet nödvändiga upprepningar om det är m rader och n kolumner?

d. Hur många gånger måste en perfekt riffelblandning av en kortlek upprepas för att alla korten skall komma till utgångsläget (två fall)?

8. I en radhuslänga med sex hus (med nr, i ordning, 1–6) bor sex gifta par (vart och ett bestående av en kvinna och en man), ett par i varje hus.

Var och en av kvinnorna har också (precis) en bror bland de sex männen och omvänt. Ingen bor granne med, eller är gift med, sin syster eller bror.

Anders har bara ett grannhus och bara en svåger (han bor i det ena gavelhuset, nr 1, och hans frus bror är hans systers man). Anders granne Börje däremot, har både två grannhus (förstås) och två svågrar (båda bosatta i radhuslängan).

a. I vilket hus bor Anders syster Anna?

b. I det andra gavelhuset, nr 6, bor Cecilia med sin man. Börjes syster heter Birgitta. Ange var vart hus frus bror bor.

9.** 100 personer har biljett till varsin av de 100 platserna i en biosalong. Den som går in först har dock tappat sin biljett och sätter sig på en slumpmässigt (likafördelat) vald plats. Var och en av de övriga sätter sig på sin egen plats om den är ledig, annars på en lika slumpmässigt vald (ledig) plats.

Vad är sannolikheten att den som kommer in sist hamnar på sin egen plats?

Att den k :e personen från slutet hamnar rätt?

10.** Tre personer får veta att de samtidigt skall få varsin hatt på huvudet, var och en med sannolikhet $\frac{1}{2}$ en röd och sannolikhet $\frac{1}{2}$ en blå hatt, de olika hattarnas färger oberoende. De kan se de två andras hattar, men inte sin egen. De ges chansen att gissa färgen på sin egen hatt, men kan avstå från att gissa om de vill. Om (och endast om) minst en gissar rätt färg på sin egen hatt och ingen gissar fel, får de ett pris. De får inte veta om eller vad de övriga gissar. Hur stor sannolikhet att vinna kan de få, om de i förväg kan komma överens om en strategi för gissandet? Om de t.ex. bestämmer att A skall gissa "röd" och att B och C skall avstå, har de tydligen sannolikheten $\frac{1}{2}$ att vinna, men kan de öka sannolikheten?