Matematik, KTH **SF1662, Diskret matematik för CL1, vt 2012**
B.Ek

Svar till övning 6, den 9 mars 2012

1. Det finns $\binom{5}{3} \cdot 10^3 \cdot (5)_3 = \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3} \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 600000$ olika sådana följder (3 av 5 möjliga positioner med siffror, de kan väljas på 10^3 sätt och bokstäverna på $(5)_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3$ sätt).
2a. På $\binom{15}{4}\binom{11}{1} + \binom{15}{3}\binom{11}{2} + \binom{15}{2}\binom{11}{3}(= 57365)$ sätt.
 b. Från antalet i a. skall dras $\binom{14}{3}\binom{10}{0} + \binom{14}{2}\binom{10}{1} + \binom{14}{1}\binom{10}{2} = \binom{24}{3} - \binom{10}{3}(= 1904)$ sätt. Svaret blir 55461.
3. Båda leden ger antalet sätt att välja ut k element från en disjunkt union av en m-mängd och en n-mängd.
Påståendet kan också visas med induktion över m (eller n).
4. Beräkna $\int_0^1 (1+x)^n\,dx$ på två sätt **eller**
visa och använd att $\frac{1}{i+1}\binom{n}{i} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{i+1}$ etc.
5. Summan är fibonaccitalet F_{n+1}. Visas med induktion över n (nog enklast genom att notera att summan kan skrivas $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\binom{n-k}{k}$ och visa att den uppfyller samma rekursionsekvationer som F_{n+1}).
Man kan också se det genom att tolka F_{n+1} som antalet sätt att lägga en $2\times n$-trädgårdsgång med 2×1-plattor. $\binom{n-k}{k}$ är antalet sätt att välja ut vilka $2k$ stenar som skall ligga på längden.
6. En följd singlingar med utfall s_1, s_2, s_3, … ger likafördelade ”binaltal” $x = 0, s_1s_2s_3s_4 \cdots \in [0,1]$. Expressen om $x < \alpha$, Aftonbladet om $x > \alpha$. Det avgörande är det s_i som först avviker från α:s i:te ”binal”. Om det s_i:et är 0 är $x < \alpha$, om det är 1 är $x > \alpha$. Sannolikheten att något s_i avviker från α:s motsvarande ”binal” är 1.
7. $\binom{n+5}{5} = \frac{(n+5)!}{5!n!} = \frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}$ sätt (oordnat urval med upprepning av n bland 6).
8a. 10^5 b. $\binom{10}{5} = 252$ (bestäms entydigt av de ingående talen)
c. $\binom{10+5-1}{5} = \binom{14}{5} = 2002$ (bestäms också entydigt av de ingående talen)
d. $2 \cdot \binom{14}{5} - 10 = 3994$ (lika många avtagande som växande, 10 konstanta).
9. Minst två av talen är lika (mod 11) (postfacksprincipen).
10. Låt $s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \ldots, s_n = a_1 + \ldots + a_n$. Enligt postfacksprincipen är antingen något av s_i:na $0 \pmod n$ eller två av dem lika $\pmod n$.
11. $\binom{n}{4}$ st. Skärningspunkterna motsvarar bijektivt 4-delmängder av P_i:na.
12*. Betrakta följden $\{(F_i, F_{i+1}) \pmod k\}_{i=1}^{k^2+1}$. Varje term bestämmer både den föregående och den följande entydigt. Eftersom någon term upprepas (postfacksprincipen), gör också den första det, $(F_{n+1}, F_{n+2}) \equiv (1,1) \pmod k$ för något n, $1 \le n \le k^2$. Då är $F_n \equiv 0 \pmod k$.

13*. Genererande funktioner. Om $a_1, a_2, \ldots$ och $b_1, b_2, \ldots$ är antalen sidor med 1, 2, ... ögon på de två tärningarna och polynomen $f(x)$, $g(x)$ ges av $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$, $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1}$ gäller (varför?) $f(x)g(x) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^5)^2 = \frac{1}{(x-1)^2}(x^6 - 1)^2 = \frac{(x^3+1)^2(x^3-1)^2}{(x-1)^2} = (x+1)^2(x^2 - x + 1)^2(x^2 + x + 1)^2$. Dessa faktorer kan inte faktoriseras mer som reella polynom, så (entydig faktorisering och alla a_n, b_n är naturliga tal) $f(x)$ och $g(x)$ skall "dela på" de sex faktorerna. Eftersom $f(1) = g(1) = 6$ måste båda innehålla $(x+1)(x^2+x+1)$, så den enda möjligheten att få "ovanliga" tärningar är med $f(x) = (x+1)(x^2-x+1)^2(x^2+x+1)$, $g(x) = (x+1)(x^2+x+1)$ (eller tvärtom), dvs $f(x) = x^7+x^5+x^4+x^3+x^2+1$, $g(x) = x^3+2x^2+2x+1$. Alla koefficienter är här naturliga tal (inga är negativa), så det finns precis en möjlighet till ovanliga tärningar med den önskade egenskapen. Den ena tärningen skall ha 1, 3, 4, 5, 6, 8 ögon på sidorna och den andra 1, 2, 2, 3, 3, 4.