

Svar till övning 5, den 2 mars 2012

1a. Ingendera, b. bara injektiv, c. bara surjektiv, d. alla fyra.

2. Man finner värdena:

a.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x^3 + 3x + 7$	7	2	3	7	2	3	7	2	3

 så detta f har ingen av egenskaperna.

b.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x^3 + 4x + 5$	5	1	3	8	4	6	2	7	0

 så detta f har alla fyra egenskaperna.

c.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x^3 + 5x + 4$	4	1	4	1	7	1	7	4	7

 så detta f har ingen av egenskaperna.

3. Eftersom $\text{sgd}(1632, 4711) = 1$ är 1632 inverterbar i $\mathbb{Z}_{4711}$, så f är inverterbar ($f^{-1}(x) = 1632^{-1}(x - 1792)$) och därmed bijektiv, vilket medför att den också är injektiv och surjektiv.

4. $f(x) = x^2 + 1721x + 1066 = x^2 + (1721 + 4711)x + 1066 = x^2 + 2 \cdot 3216x + 3216^2 - 3216^2 + 1066 = (x + 3216)^2 - 3216^2 + 1066$, så $f(4711 - 3216 + 1) = f(4711 - 3216 - 1)$ och f är inte injektiv. Den är alltså ($\mathbb{Z}_{4711}$ är ändlig) inte heller surjektiv, bijektiv (= injektiv och surjektiv) eller inverterbar (= bijektiv).

5. Minsta exemplet: $|X| = |Z| = 1$, $|Y| = 2$, f, g godtyckliga funktioner.

Med mängderna lika: $X = Y = Z = \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1$, $g(x) = \max(x - 1, 0)$.

(Om gf är injektiv måste f vara injektiv och om gf är surjektiv måste g vara surjektiv. I det sökta exemplet kan f alltså inte vara surjektiv och g inte injektiv (ingen av dem skall ju vara bijektiv).)

6. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = f(f(x_1)) = f(f(x_2)) = x_2$, så f är injektiv.

Varje $x = f(f(x))$, så f är surjektiv. f är injektiv och surjektiv, så bijektiv.

(Eller $ff = \text{id}_A$ betyder att $f = f^{-1}$, f har en invers, så f är bijektiv.)

7a. Nej, ty eftersom $\mathbb{Q}$ är uppräknelig och $\mathbb{R}$ är överuppräknelig finns ingen injektion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ (och ingen surjektion $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$),

b. ja, t.ex. $f(x) = x$ för alla $x \in \mathbb{Q}$, $g(x) = x$, $x \in \mathbb{Q}$, $g(x) = 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

8. $2646000 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2$, så (multiplikationsprincipen) $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 240$ st olika positiva delare.

9. $5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 2240$ st (multiplikationsprincipen; 5 möjliga slutsiffror, då 8 möjliga tusentalssiffror etc).

Observera att det är viktigt i vilken ordning man "väljer" siffrorna, om man inte börjar med entalssiffrorna kommer antalet möjliga val av dem att bero av redan gjorda val!

10. På $13! - 2 \cdot 13 \cdot 11! = 13 \cdot 10 \cdot 11!$ (= 5189184000) sätt.

11*. En bijektion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ ges av $f(n) = \{i \in \mathbb{N} \mid r_i = 1\}$, där $\sum_{i=0}^{\infty} r_i 2^i$ är den binära utvecklingen av n , så $r_i = 0$ utom för ändligt många i .

12*. Ingen. Varje boll har ju tagits ur och kastats bort.