

Exempel för övning 5, den 2 mars 2012

1. Avgör om sambandet $f(x) = x^2$ definierar en injektiv, surjektiv, bijektiv och/eller inverterbar funktion i följande fall
a. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **b.** $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, **c.** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ **d.** $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.
 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ betecknar här de icke-negativa reella talen $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.
2. Är $f : \mathbb{Z}_9 \rightarrow \mathbb{Z}_9$ injektiv, surjektiv, bijektiv och/eller inverterbar då
a. $f(x) = x^3 + 3x + 7$, **b.** $f(x) = x^3 + 4x + 5$, **c.** $f(x) = x^3 + 5x + 4$?
3. Avgör om $f : \mathbb{Z}_{4711} \rightarrow \mathbb{Z}_{4711}$, $f(x) = 1632x + 1792$ är injektiv, surjektiv, bijektiv och/eller inverterbar.
4. Avgör om $f : \mathbb{Z}_{4711} \rightarrow \mathbb{Z}_{4711}$, $f(x) = x^2 + 1721x + 1066$ är injektiv, surjektiv, bijektiv och/eller inverterbar.
5. Ge exempel på mängder X, Y, Z och funktioner $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, så att sammansättningen $gf : X \rightarrow Z$ är en bijektion, trots att varken f eller g är det.
Lite svårare: Samma uppgift, men med kravet att $X = Y = Z$.
6. Låt A vara en mängd och $f : A \rightarrow A$ en funktion sådan att $ff = id_A$, dvs $f(f(x)) = x$ för alla $x \in A$. Visa att f är en bijektion.
- 7a. Finns det $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ och $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, så att $gf : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är en bijektion?
b. Finns det $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$, så att $gf : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ är en bijektion?
8. Hur många positiva delare till talet 2646000 finns det?
9. Hur många udda tal mellan 1000 och 10000 har (bas 10) alla siffror olika?
10. På hur många sätt kan 13 personer placeras på 13 olika stolar kring ett runt bord, utan att Lisa och Olle (som är bland de 13) sitter bredvid varandra?
- 11*. Enligt den sats av Cantor som presenterades på föreläsningen är potensmängden till $\mathbb{N}$ inte uppräknelig, dvs det finns överuppräkneligt många mängder av naturliga tal, $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}|$.
Visa att antalet **ändliga** mängder av naturliga tal är uppräkneligt, dvs

$$|\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})| = |\mathbb{N}|,$$

där $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}) = \{A \mid A \subset \mathbb{N}, |A| < \infty\}$.

Ledning: Det finns en enkel bijektion mellan $\mathbb{N}$ och $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$. Tänk binära tal!

12*. (En klassisk illustration av märkligheter med oändligheten.)

Vi har en (stor) låda och ett (uppräkneligt) oändligt antal bollar, numrerade 0, 1, 2, ... Från början ligger bara boll nummer 0 i lådan.

Vid varje tidpunkt $t = -\frac{1}{2^n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ tar vi ut och kastar bort den lägst numrerade bollen och lägger i alla återstående bollar upp till nummer 2^n .

Under allt kortare intervall kommer alltså följande bollar att ligga i lådan:

0; 1; 2; 3, 4; 4–8; 5–16; 6–32; 7–64; 8–128; ...

Hur många bollar ligger i lådan vid $t = 0$ (efter ett oändligt antal operationer)?

13.** På en föreläsning visades att om man utgår från 6 punkter och mellan varje par av dem drar antingen en röd eller en blå linje, uppstår minst en enfärgad triangel.

a. Visa att det i själva verket blir minst två enfärgade trianglar.

b. Visa att om man i stället utgår från 10 punkter och gör på samma sätt, uppstår antingen en helt röd triangel eller en helt blå "tetraeder" (dvs fyra punkter som alla parvis är förbundna med blå linjer).

c. Visa att det i **b** räcker med 9 punkter.