Matematik, KTH **SF1662, Diskret matematik för CL1, vt 2012**
B.Ek

Svar till övning 4, den 20 februari 2012

1. $A \cup B = \{1,2,3,4,7\}$, $B \cap C = \{1,4\}$, $B \setminus A = \{7\}$, $A \setminus B = \{2\}$, $\mathcal{P}(C) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,4\}, \{2,4\}, C\}$, $C \times B = \{(1,1), (1,3), (1,4), (1,7), (2,1), (2,3), (2,4), (2,7), (4,1), (4,3), (4,4), (4,7)\}$.
$C \nsubseteq A \cap B$ (ty $2 \in C$, $2 \notin A \cap B$), $C \in \mathcal{P}(A)$ (ty $C \subseteq A$),
$A \notin \mathcal{P}(B) \cup \mathcal{P}(C)$ (ty $A \nsubseteq B$, $A \nsubseteq C$), $C \times B \subseteq A \times B$ (följer av $C \subseteq A$).
2. Med "räkneregler", $((A^c \cup B^c) \setminus A)^c = ((A^c \cup B^c) \cap A^c)^c = (A^c)^c = A$ (med reglerna för absorption och dubbelt komplement).
Venndiagram går också bra.
3. $\Rightarrow$: Antag $A^c \cap B = \varnothing$ och låt $x \in B$. Då fås $x \notin A^c$ (ty $x \notin \varnothing$), så $x \in (A^c)^c$, dvs $x \in A$ (ty $x \in \mathcal{U}$). Således $x \in B \Rightarrow x \in A$, dvs $B \subseteq A$.
$\Leftarrow$: Antag $B \subseteq A$ och låt $x \in A^c \cap B$. Då $x \in B \subseteq A$ (så $x \in A$) och $x \in A^c$. Således $x \in A \cap A^c = \varnothing$, vilket är omöjligt, så sådana x finns inte, $A^c \cap B = \varnothing$.
4. Mängden $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ har 3 element, så dess potensmängd har $2^3 = 8$ element (som $\mathcal{P}(C)$ i uppgift 1). Mängden $\{\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}$ har 1 element, så dess potensmängd har $2^1 = 2$ element.
$\mathcal{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\},$
$\{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \{\{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}$,
$\mathcal{P}(\{\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}) = \{\varnothing, \{\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}\}$.
5*. Sådana mängder kallas **transitiva**, så C är transitiv precis om $B \in C \Rightarrow B \subseteq C$, dvs precis om $C \subseteq \mathcal{P}(C)$, och också precis om $\cup C \subseteq C$ (där $\cup C$ är unionen av alla C:s element, $\cup C = \{A \mid A \in B \text{ för något } B \in C\}$).
Den första mängden i uppgift 4. är transitiv, liksom $\varnothing$.
Om C är transitiv är också $C \cup \{C\}$ transitiv, så man får en oändlig följd transitiva mängder från en, men inte alla transitiva mängder fås så från $\varnothing$. T.ex. är ju $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$ transitiv.
6. $\mathcal{R}$ är inte reflexiv, ty $(d,d) \notin \mathcal{R}$.
$\mathcal{R}$ är inte symmetrisk, ty $(a,b) \in \mathcal{R}$, $(b,a) \notin \mathcal{R}$.
$\mathcal{R}$ är inte anti-symmetrisk, ty $(c,d) \in \mathcal{R}$, $(d,c) \in \mathcal{R}$, men $c \neq d$.
$\mathcal{R}$ är inte heller transitiv, ty $(c,d) \in \mathcal{R}$, $(d,c) \in \mathcal{R}$, men $(d,d) \notin \mathcal{R}$.
7. Alla mängder människor där ingen syskonskara är tvåkönad.
8. Minimala exempel:
$\mathcal{R}_a = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,b), (b,a), (b,c), (c,b)\}$,
$\mathcal{R}_b = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,b)\}$,
$\mathcal{R}_c = \varnothing$.
9. $\subseteq$ är en partialordning (dvs reflexiv, anti-symmetrisk och transitiv) på varje mängd av mängder, här på $X = \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.
$\{1\}$ och $\{2\}$ är minimala element, det finns inget minsta element.
$\{1,2,3\}$ är största element och (därmed) enda maximalt element.
10. Om $\mathcal{R}$ är både symmetrisk och antisymmetrisk gäller att $a\mathcal{R}b \Rightarrow a = b$. Om $\mathcal{R}$ är reflexiv gäller $a = b \Rightarrow a\mathcal{R}b$. Å andra sidan är likhetsrelationen en ekvivalensrelation och en partialordning. Så $\mathcal{R}$ är likhetsrelationen på A, med mängden av ekvivalensklasser $\{\{a\} \mid a \in A\}$.