

Exempel för övning 4, den 20 februari 2012

1. Mängderna A, B, C ges av $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 4, 7\}$, $C = \{1, 2, 4\}$. Ange mängderna $A \cup B$, $B \cap C$, $B \setminus A$, $A \setminus B$, $\mathcal{P}(C)$, $C \times B$.

Avgör vilka av följande påståenden som är sanna och vilka som är falska: $C \subseteq A \cap B$, $C \in \mathcal{P}(A)$, $A \in \mathcal{P}(B) \cup \mathcal{P}(C)$, $C \times B \subseteq A \times B$. Motivera.

2. Visa, dels med räknereglerna på sidan 25 i läroboken (den första) och dels med ett Venndiagram, att för godtyckliga mängder A, B gäller

$$((A^c \cup B^c) \setminus A)^c = A.$$

Minns att $M \setminus N$ kan uttryckas som $M \cap N^c$.

3. Gäller för alla mängder A och B att

$$A^c \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B \subseteq A?$$

Motivera.

4. Vad är $|\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\})|$?

Vad är $|\mathcal{P}(\{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\})|$?

Ange alla element i $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\})$ och i $\mathcal{P}(\{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\})$.

5*. Finns det någon mängd C så att för alla mängder A och B gäller

$$(A \in B \text{ och } B \in C) \Rightarrow A \in C?$$

Förklara varför ingen finns eller ge minst två exempel.

6. Den binära relationen $\mathcal{R}$ på mängden $X = \{a, b, c, d\}$ ges av

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c)\}.$$

Avgör om $\mathcal{R}$ är reflexiv, symmetrisk, anti-symmetrisk och/eller transitiv.

7. För vilka mängder av människor gäller att relationen "är syster till" är symmetrisk?

8. Låt $X = \{a, b, c, d\}$ och ge exempel på en relation på X som är

a. reflexiv och symmetrisk, men inte transitiv,

b. reflexiv och transitiv, men inte symmetrisk,

c. symmetrisk och transitiv, men inte reflexiv.

9. Låt $A = \{1, 2, 3\}$ och $X = \{B \subseteq A \mid 1 \in B \text{ eller } 2 \in B \text{ (eller båda)}\}$.

Visa att relationen $\subseteq$ på X är en partialordning. Finn alla minimala, minsta, maximala och största element i X med denna ordning.

10. Låt A vara en mängd och beskriv alla relationer på A som både är ekvivalensrelationer och partialordningar. Vilka är ekvivalensklasserna?

11*. Två fyrar blinkar med intervall α respektive β (minuter). α och β är irrationella tal sådana att $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ (dvs i medeltal kommer ett blink per minut). Visa att om de båda blinkar vid tiden $t = 0$ kommer det under "heltalsminuten" mellan $n - 1$ och n precis ett blink, för alla heltal $n > 1$.