

Svar till övning 3, den 10 februari 2012

1. Induktion över n .

Bas: $VL_1 = 1 \cdot 2 = 2$, $HL_1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2$, så påståendet är **sant för $n = 1$** .

Steg: **Antag** (IA) att det stämmer för $n = k$, dvs $VL_k = HL_k$.

Då fås $VL_{k+1} = VL_k + (k+1)(k+2) \stackrel{IA}{=} HL_k + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = (k+1)(k+2)(\frac{k}{3} + 1) = (k+1)(k+2)\frac{k+3}{3} = HL_{k+1}$, så om det stämmer för $n = k$, stämmer det också för $n = k+1$, **steget är klart**.

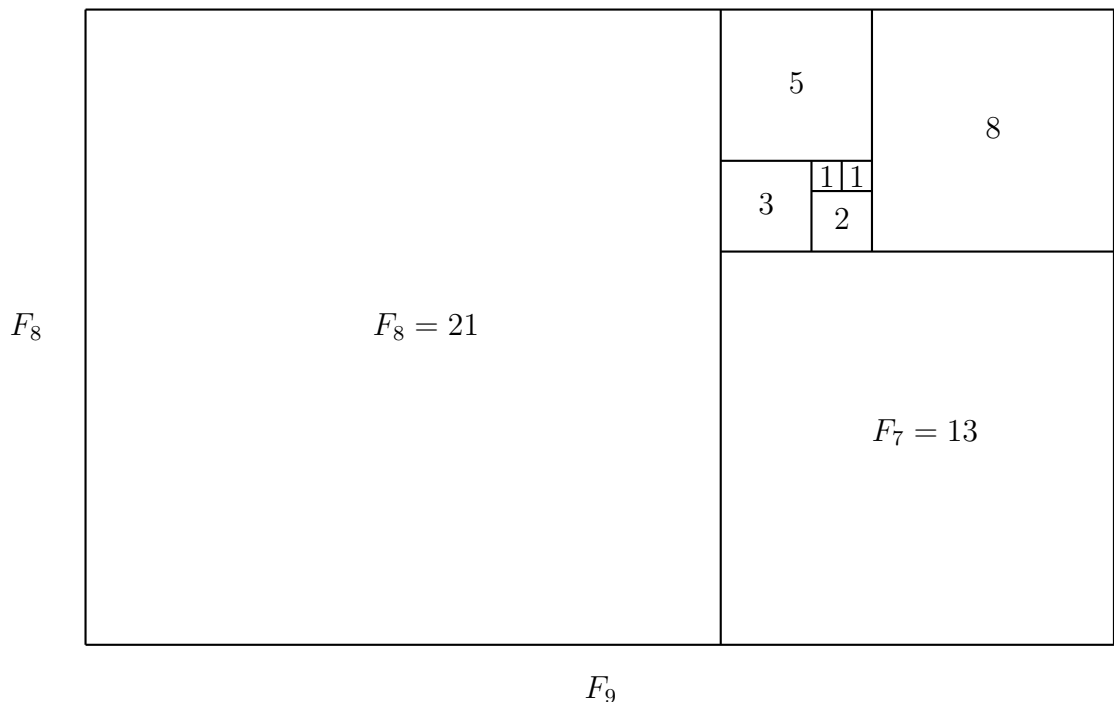
Enligt **induktionsprincipen** gäller påståendet för alla $n = 1, 2, 3, \dots$. Saken är klar.

2. Induktion över k för kvadrat med sida 2^k . Tag bort en L-bit vid mitten, så att fyra 2^{k-1} -kvadrater med vardera en saknad ruta återstår etc.

3. Induktion. För a.: $F_k F_{k+1} + F_{k+1}^2 = F_{k+1}(F_k + F_{k+1}) = F_{k+1} F_{k+2}$.

För b.: $F_k F_{k+2} - F_{k+1}^2 = F_k(F_k + F_{k+1}) - (F_{k-1} + F_k)F_{k+1} = -(F_{k-1}F_{k+1} - F_k^2)$.

Resultatet i a. åskådliggörs av figuren, som illustrerar hur en rektangel med sidor F_n och F_{n+1} kan delas upp i kvadrater med sidorna $F_1, F_2, \dots, F_n$:



4. Vi visar påståendet $a_n = 2^{n+1} + 3(-1)^n$ för $n = 0, 1, \dots$ med induktion.

För att det skall vara den "enkla" typen av induktion kan vi låta påståendet vara $a_n = \dots$ **och** $a_{n+1} = \dots$

Bas: $a_0 = 5 = 2^{0+1} + 3(-1)^0$, $a_1 = 1 = 2^{1+1} + 3(-1)^1$, det **stämmer för $n = 0$ och $n = 1$** .

Steg: **Antag** (IA) att det stämmer för $n = k$ och $n = k+1$.

Då $a_{k+2} = a_{k+1} + 2a_k \stackrel{IA}{=} 2^{k+2} + 3(-1)^{k+1} + 2(2^{k+1} + 3(-1)^k) = 2 \cdot 2^{k+2} + 3(-(-1)^{k+2} + 2(-1)^{k+2}) = 2^{(k+2)+1} + 3(-1)^{k+2}$, så det **stämmer för $n = k+2$** .

Induktionsprincipen ger att **saken är klar**.

5. Upprepad polynomdivision, analogt med heltal uttryckta i bas t .

$$x^5 + \frac{5}{3}x^4 + \frac{10}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{2} = (x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{13}{6}x - \frac{7}{6})(x^2 + x + \frac{1}{2}) + \frac{7}{12}x + \frac{7}{12},$$

$$x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{13}{6}x - \frac{7}{6} = (x - \frac{1}{3})(x^2 + x + \frac{1}{2}) + 2x - 1,$$

Så $b_2(x) = x - \frac{1}{3}$, $b_1(x) = 2x - 1$, $b_0(x) = \frac{7}{12}x + \frac{7}{12}$.

6. Vi använder att om $z \in \mathbb{Z}[i]$ är irreducibelt (ett gaussiskt primtal) måste $|z|^2$ vara ett "vanligt" primtal eller kvadraten av ett och om $|z|^2$ är ett "vanligt" primtal eller kvadraten av ett som är $\equiv_4 3$ är z ett gaussiskt primtal.

(I själva verket gäller att om $|z|^2 = p^2$, p ett "vanligt" primtal $\equiv_4 1$, är z inte ett gaussiskt primtal, men det har vi inte visat.)

Eftersom $|2+i|^2 = 5$, $|3+i|^2 = 10$, $|4+i|^2 = 17$, $|5|^2 = 25$, $|7|^2 = 49 = 7^2$, $|4+3i|^2 = 25$, $15 = 3 \cdot 5$, $|7-i|^2 = 50$, $|8+i|^2 = 65 = 5 \cdot 13$ ger det att $2+i$, $4+i$ och 7 är gaussiska primtal, att $3+i$, 15 , $7-i$ och $8+i$ inte är det och att 5 och $4+3i$ måste undersökas.

För att finna faktoriseringar använder vi att $|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2$.

$3+i$ måste ha en primfaktor z_1 med $|z_1|^2 = 2$. Vi dividerar med $1+i$ och finner att $3+i = (1+i)(2-i)$, där båda faktorerna är irreducibla.

$5 = 2^2 + 1^2$, så $5 = (2+i)(2-i)$, båda faktorerna gaussiska primtal.

Om $4+3i = z_1 z_2$ och $|z_{1,2}| \neq 1$ måste $|z_1| = |z_2| = 5$. Vi prövar med $2 \pm i$ och finner att $(2+i) \nmid (4+3i)$, men $4+3i = (2-i)(1+2i) = i(2-i)^2$.

3 är ett gaussiskt primtal, men $5 = (2+i)(2-i)$, så $15 = 3(2+i)(2-i)$, faktorerna primtal.

$|7-i|^2 = 2 \cdot 5^2$. Vi prövar med en faktor $1+i$ (med $|1+i|^2 = 2$) och finner att $7-i = (1+i)(3-4i) = (1+i)(2-i)^2$.

$8+i$ måste ha en faktor med $|z|^2 = 5$, så vi prövar med $2 \pm i$ och finner $8+i = (2-i)(3+2i)$.

7. Euklides algoritm.

$$21 + 37i = (1+i)(26+12i) + (7-i),$$

$$26 + 12i = (3+2i)(7-i) + (3+i),$$

$$7-i = (2-i)(3+i) + 0,$$

$$\begin{aligned} \text{Den första kvoten fås enklast "för hand",} \\ 21 + 37i &= 1 \cdot (26 + 12i) + (-5 + 25i) = \\ &= (1+i)(26+12i) + (7-i). \end{aligned}$$

$$\text{För den andra, finn } \frac{26+12i}{7-i} = \frac{1}{10}(34+22i)$$

så **sgd(21 + 37i, 26 + 12i) = 3 + i**.

"Baklänges":

$$\begin{aligned} 3+i &= (26+12i) - (3+2i)(7-i) = \\ &= (26+12i) - (3+2i)((21+37i) - (1+i)(26+12i)) = \\ &= (-3-2i)(21+37i) + (1+(3+2i)(1+i))(26+12i) = \\ &= (-3-2i)(21+37i) + (2+5i)(26+12i), \end{aligned}$$

så vi kan ta **$\alpha = -3 - 2i$, $\beta = 2 + 5i$** .