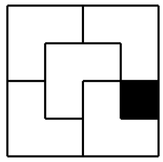
Exempel för övning 3, den 10 februari 2012

1. Visa, t.ex. med induktion, att för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) = \sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

2. En kvadrat med sida 1024 är uppdelad i 1024×1024 rutor med sida 1. Visa att om man tar bort en av dessa rutor, kan resten av kvadraten täckas av ”L-formade” bitar med 3 rutor.
I figuren visas ett möjligt fall för en kvadrat med sida 4.



3. Minns **fibonaccitalen** F_n: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$, rekursivt definierade av

$$\begin{cases} F_0 = 0, \ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

a. Visa att $F_0^2 + F_1^2 + \cdots + F_n^2 = \sum_{i=0}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$ för alla $n = 0, 1, 2, \ldots$

b. Visa att $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$

4. Låt följden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definieras rekursivt av

$$\begin{cases} a_0 = 5, \ a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n, \quad n = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

Visa att $a_n = 2^{n+1} + 3(-1)^n$ för alla $n = 0, 1, \ldots$

5. Låt $f(x) = x^5 + \frac{5}{3}x^4 + \frac{10}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{2}x$ och $t(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}$.
Finn $b_2(x)$, $b_1(x)$, $b_0(x) \in \mathbb{Q}[x]$ så att $f(x) = b_2(x)(t(x))^2 + b_1(x)t(x) + b_0(x)$.

6. Skriv följande gaussiska heltal som produkter av gaussiska primtal:

$$2+i, \ 3+i, \ 4+i, \ 5, \ 7, \ 4+3i, \ 15, \ 7-i, \ 8+i.$$

7. Bestäm $\mathrm{sgd}(21+37i, 26+12i)$ (i de gaussiska heltalen, $\mathbb{Z}[i]$) och finn α, $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ så att $\mathrm{sgd}(21+37i, 26+12i) = \alpha(21+37i) + \beta(26+12i)$.

8****.** Visa för fibonaccitalen $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ att $\mathrm{sgd}(F_m, F_n) = F_{\mathrm{sgd}(m,n)}$.