Matematik, KTH **SF1662, Diskret matematik för CL1, vt 2012**
B.Ek

Svaren till övning 2, den 1 februari 2012

1. $\boldsymbol{x = 20 + 21n,\ n} \in \mathbb{Z}$, så två lösningar i $\mathbb{Z}_{42}$ ($x = 20$ och $x = 41$)

2. $\boldsymbol{x = 397 + 648n,\ n} \in \mathbb{Z}$ (första ger $x = 5 + 8k$, så andra ger $8k \equiv_{81} 68$ etc.)

3. 5 st 1-kronor, 8 st 5-kronor, 3 st 10-kronor.

4. $111 = 3 \cdot 37$, $467 = 467$ (primtal), $314000 = 2^4 \cdot 5^3 \cdot 157$.

$(10300)_6 = (103)_6 \cdot (100)_6 = 39 \cdot 6^2 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 13$.

5. Eftersom $n^5 - n = (n^2 + 1)(n + 1)n(n - 1)$ gäller $2 \mid n^5 - n$ och $3 \mid n^5 - n$, så $6 \mid n^5 - n$. (Alt, med modulär aritmetik, $n^5 \equiv_6 n$, ty för $n \equiv_6 0, \ldots, 5$ fås $n^5 - n \equiv_6 0$.) Således $n \mid n^5 - n + 6n = n^5 + 5n$.

6. Låt $p_1, \ldots, p_N$ vara udda primtal. Då är $p_1^2 \cdots p_N^2 + 2 \equiv_4 3$ och innehåller en primfaktor $\equiv_4 3$, men ingen av p_i:na.

7. Ja, nej.

8. Om x, y, z löser ekvationen är $x^3 = 3(3z^3 - y^3)$, så $3 \mid x^3$ och därmed $3 \mid x$ (eftersom 3 är ett primtal). $x = 3a$ ger $9a^3 + y^3 = 3z^3$, så p.s.s. $y = 3b$ och sedan $z = 3c$, där a, b, c är heltal så att $a^3 + 3b^3 = 9c^3$. Så om x, y, z löser den givna ekvationen är de alla delbara med 3 och $\frac{x}{3}$, $\frac{y}{3}$, $\frac{z}{3}$ löser samma ekvation. Det följer att x, y, z alla är delbara med 3^k för $k = 0, 1, 2, \ldots$ Enda möjligheten är att $x = y = z = 0$. (Resonemanget kan formuleras med "infinite descent" (ekvivalent med induktion): om $s = \max(|x|, |y|, |z|) > 0$ för en lösning skulle lösningen $\frac{x}{3}$, $\frac{y}{3}$, $\frac{z}{3}$ alltid ge ett strikt mindre s-värde. Det skulle ge en oändlig strikt avtagande följd positiva heltal. Omöjligt.)

9a. Om x är ett heltal är $x^2 \equiv_3 0$ (omm $3 \mid x$) eller $\equiv_3 1$ (ty $0^2 = 0$, $1^2 = 2^2 = 1$ i $\mathbb{Z}_3$) och VL i $a^2 + b^2 = c^2$ måste vara $0 + 0$, $0 + 1$ eller $1 + 0 \pmod 3$.
b. $x^2 \equiv_5 0$ (omm $5 \mid x$), $\equiv_5 1$ eller $\equiv_5 4$ (ty $0^2 = 0$, $1^2 = 4^2 = 1$, $2^2 = 3^2 = 4$ i $\mathbb{Z}_5$) och $a^2 + b^2 \equiv_5 c^2$ är omöjligt med $a^2, b^2, c^2 \equiv_5 1$ eller 4.
c. $x^2 \equiv_4 0$ (omm x jämnt) eller $\equiv_4 1$ (omm x udda), så inte båda a och b kan vara udda. Om de båda är jämna är $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2})$ en pythagoreisk trippel, så minst en av $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$ jämn. Om precis en av a, b vore jämn och den inte vore delbar med 4 vore $a^2 + b^2 \equiv_8 5$ och $c^2 \equiv_8 1$ (ty $2^2 = 6^2 = 4$, $1^2 = 3^2 = 5^2 = 7^2 = 1$ i $\mathbb{Z}_8$).

10*. Om talet $n = (a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0)_{10}$ så gäller $n \equiv_9 (a_k + \cdots + a_1 + a_0)$, n:s siffersumma, ty $10^i - 1 = (99\ldots99)_{10}$ så $9 \mid a_i \cdot 10^i - a_i$. Summan av alla siffrorna i 2^{29} är alltså $\equiv_9 2^{29}$. Men $2^2 \equiv_9 4, 2^3 \equiv_9 8, 2^4 \equiv_9 7, 2^5 \equiv_9 5, 2^6 \equiv_9 1$, så $2^{29} = 2^{4 \cdot 6 + 5} \equiv_9 1^4 \cdot 2^5 \equiv_9 5$. Men $0 + 1 + 2 + \cdots + 9 = 45 \equiv_9 0$, så **den saknade siffran är 4**$(\equiv_9 -5)$.