

Svar och lösningsförslag till övningsks 5.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}p$, inget svar $0p$, fel svar $-\frac{1}{2}p$.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

	sant	falskt
a) Om G_1 och G_2 är isomorfa grafer så har G_1 och G_2 samma antal hörn och samma antal kanter. Ja, hörn motsvarar hörn med samma antal kanter.	×	
b) Varje träd är en planär graf. Ja, visas med induktion (tag i steget bort ett löv).	×	
c) Varje graf har (minst) ett spännande träd. Nej, inte säkert. Grafen måste vara sammanhängande.		×
d) Om, i en sammanhängande graf, alla hörn har jämn valens så finns minst en eulerkrets. Ja, (Euler).	×	
e) En fullständig bipartit graf har alltid en hamiltoncykel. Nej, inte om $ X \neq Y $.		×
f) Varje sammanhängande graf med 17 hörn och 18 kanter har precis två olika cykler. Nej, två eller tre olika.		×

2a) (1p) Bestäm antalet kanter i en graf som har 12 hörn, varav sex har valensen (graden) 5 och sex har valensen (graden) 1.

Lösning:

Summan av alla valenser är dubbla antalet kanter,

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 6 \cdot 5 + 6 \cdot 1 = 36 = 2|E|, \text{ så } \textbf{svar: Antalet kanter är 18.}$$

b) (1p) Graferna G_1 och G_2 , med vidstående grannstabeller, är isomorfa. Ange en isomorfi mellan graferna.

1	2	3	4	resp	a	b	c	d
2	3	4	3		b	a	b	c
3	1	1			c	d	b	
		2			d			

Lösning:

Isomorfin φ parar ihop hörn med samma valens, så $\varphi(4) = a, \varphi(3) = b$.
Övriga hörn är båda grannar med valens-3-hörnet och varandra så man kan ta
 $\varphi(1) = c, \varphi(2) = d$ eller $\varphi(2) = c, \varphi(1) = d$.

**Svar: Isomorfin ges av $\varphi(1) = c, \varphi(2) = d, \varphi(3) = b, \varphi(4) = a$
eller av $\varphi(1) = d, \varphi(2) = c, \varphi(3) = b, \varphi(4) = a$.**

c) (1p) En planär sammanhängande graf G har 16 hörn och 18 kanter. Hur många ytor har en plan ritning av grafen, om ytan utanför grafen räknas med?

Lösning:

Eulers polyederformel ger (med v st hörn, e st kanter och r st ytor) $v - e + r = 2$. Vi har $v = 16$ och $e = 18$ och söker r . Vi får $r = 2 - 16 + 18 = 4$.

Svar: 4 ytor

3) (3p) Bestäm antalet spännade träd till grafen med grann Tabellen:

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7	8	1
8	1	2	3	4	5	6	7

Lösning:

Om man ritar grafen, ser man att det handlar om den cykliska grafen med 8 hörn (och 8 kanter). Ett spännande träd uppstår precis om man tar bort en kant i den enda cykeln, dvs vilken som helst av kanterna.

Svar: Det finns 8 stycken olika spännande träd till grafen.

4) (3p) Visa att det inte finns någon sammanhängande planär graf med 13 hörn och 35 kanter. (Du får använda alla satser som ingår i kursen.)

Lösning:

Eulers polyederformel för en sammanhängande planär graf säger: $v - e + r = 2$ (gängse beteckningar).

I en plan graf begränsas varje yta av minst 3 kanter, så (varje kant "hör till" 2 ytor (eller till en, men räknas i så fall dubbelt)), $3r \leq 2e$.

$v = 13, e = 35$ skulle ge $13 - 35 + r = 2$, så $r = 24$, men då fås $3r = 72 \not\leq 2e = 70$, så en graf med dessa v, e kan inte vara sammanhängande och planär, **saken är klar.**

(Man kan förstås också minnas (eller visa ur ovanstående) och utnyttja att för en planär, sammanhängande graf gäller $e \leq 3v - 6$.)

5) (3p) Grafen G har precis en cykel. Antalet hörn (noder) i G är 126 och antalet kanter är 125. Hur många komponenter består G av?

Lösning:

Om man tar bort en kant i cykeln, fås en graf med 126 hörn, 124 kanter och lika många komponenter som G . I den är alltså varje komponent ett träd (så grafen är en skog) och har antalet hörn ett mer än antalet kanter. Totalt finns 2 hörn mer än antalet kanter, så det finns 2 komponenter

Svar: Antalet komponenter i G är 2.
