

Svar och lösningsförslag till övningsks 3.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$ p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

	sant	falskt
a) Om de ändliga grupperna G_1 och G_2 är isomorfa så är de lika stora. [Ja, isomorfin är en bijektion mellan dem.]	×	
b) Två grupper som är lika stora är alltid isomorfa. [Nej, t.ex. S_3 och $(\mathbb{Z}_6, +)$ är lika stora, men inte isomorfa.]		×
c) Sidoklasser till en och samma delgrupp H till en grupp G är lika stora. [Ja, de är båda lika stora som H .]	×	
d) Varje grupp har minst en cyklisk delgrupp. [Ja, varje element genererar en cyklisk delgrupp.]	×	
e) Lagranges sats säger att om H är en delgrupp till G så gäller att talet $ H $ delar talet $ G $. [Ja, faktiskt.]	×	
f) Om elementet g i en grupp G med gruppoperationen $\circ$ har ordning 20 så har elementet $g \circ g$ ordning 10. [Ja, $(g \circ g)^k = e$ för $k = 10$, men inte för mindre $k > 0$.]	×	

2a) (1p) Låt gruppen G ha vidstående grupptabell.
Bestäm ett element x i G sådant att $bx d = c$.

$\circ$	a	b	c	d	f
a	a	b	c	d	f
b	b	c	d	f	a
c	c	d	f	a	b
d	d	f	a	b	c
f	f	a	b	c	d

Lösning:

Eftersom $bb = c$, gäller $bx d = c$ omm $xd = b$ (multiplicera med b^{-1} från vänster). Men $dd = b$, så $xd = b$ omm $x = d$, p.s.s.

Svar: $x = d$.

b) (1p) Skriv nedanstående permutation φ som en produkt av disjunkta cykler:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 6 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Lösning:

Eftersom $\varphi(1) = 2, \varphi(2) = 3, \varphi(3) = 5, \varphi(5) = 6$ o.s.v., får man

svaret: φ ges av $(1\ 2\ 3\ 5\ 6)(4\ 7)(8)$. Det kan också skrivas $(1\ 2\ 3\ 5\ 6)(4\ 7)$.

c) (1p) Gruppen $(\mathbb{Z}_3, +)$ är isomorf med vidstående grupp. Ange en isomorfi mellan grupperna.

$\circ$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Lösning:

Identitetselementen motsvarar varandra och i detta fall ser man att strukturen bevaras hur man än fortsätter bijektionen, så

svar: $\varphi(0) = e$ och $\varphi(1) = a, \varphi(2) = b$ eller $\varphi(1) = b, \varphi(2) = a$.

3) (3p) Betrakta gruppen $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, \cdot)$. Avgör om denna grupp genereras av elementet 2.

Lösning:

Frågan är om varje element i $\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}$ kan skrivas som 2^n , något n .

Man finner $\frac{n}{2^n} \begin{array}{c|cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline 2 & 4 & 8 & 3 & 6 & 12 & 11 & 9 & 5 & 10 & 7 & 1 \end{array}$ och eftersom alla element i gruppen finns med på andra raden,

svar: Ja, $\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}$ genereras av elementet 2.

Alternativt: 2 genererar gruppen om $o(2) = 12$, gruppens ordning, och eftersom $o(2) \mid 12$, räcker det att verifiera att $(2^1, 2^2, 2^3, \dots) 2^4, 2^6 \neq 1$.

4) (3p) Låt $\varphi = (1\ 3\ 2\ 4\ 5)$ och $\gamma = (1\ 2\ 5)(3\ 4)$ vara permutationer på mängden $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Bestäm ordningen av elementet $\varphi\gamma^2$.

Lösning:

$\gamma^2 = (1\ 2\ 5)(3\ 4)(1\ 2\ 5)(3\ 4) = (1\ 5\ 2)(3)(4)$,

så $\varphi\gamma^2 = (1\ 3\ 2\ 4\ 5)(1\ 5\ 2)(3)(4) = (1)(2\ 3)(4\ 5)$.

Permutationens ordning är minsta gemensamma multipeln till cykellängderna, så **svar: $\varphi\gamma^2$:s ordning är 2.**

5) (3p) Bestäm en delgrupp med tre element till den grupp G som har vidstående grupptabell:

$\circ$	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	b	c	d	f	e
b	b	c	d	f	e	a
c	c	d	f	e	a	b
d	d	f	e	a	b	c
f	f	e	a	b	c	d

Lösning:

Man kan betrakta tabellen tills man hittar en 3-delmängd till G som är sluten under $\circ$.

Mer systematiskt kan man notera att a har ordning 6 och således $aa = b$ ordning 3. b genererar alltså en delgrupp med tre element. $b^2 = d$, så

svar: $\{e, b, d\}$ är en delgrupp av ordning tre till G .
