Svar och lösningsförslag till övningsks 1.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

		sant	falskt
a)	Endast om $B \subseteq A$ så gäller att $B \cap A = A$. Nej, det senare betyder precis att $A \subseteq B$.		×
b)	$sgd(a, 2a) = a$ för alla positiva heltal a. Javisst, a är en gemensam delare och större finns inte.	×	
c)	$(A \setminus B)^c = B^c \setminus A^c$ gäller för alla mängder A och B. Nejdå, alla B:s element ingår t.ex. i VL, inte i HL(=VL^c).		×
d)	Det finns precis sex inverterbara element i $\mathbb{Z}_7$. Ja, alla $1, 2, 3, 4, 5, 6$ är inverterbara, ty 7 är ett primtal.	×	
e)	Om f är en injektiv funktion från mängden A till mängden B och $\|A\| = \|B\| < \infty$ så är f bijektiv. Ja, den blir också surjektiv, så bijektiv.	×	
f)	De rationella talen är en uppräkneligt oändlig mängd. Ja, ett standardexempel. Boken sid. 256.	×	

2a) (1p) Låt $\mathcal{P}(A)$ beteckna mängden av alla delmängder till en mängd A. Bestäm antalet element i $\mathcal{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}\})$.

Lösning:

Mängden $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ har två element, så $2^2 = 4$ olika delmängder, boken sid. 87 (eller multiplikationsprincipen, sid. 115). De är $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.
Svar: 4 st.

---

b) (1p) Ange det element i $\mathbb{Z}_7$ som är lika med elementet $5(2 + 3) + 4$.

Lösning:

$5(2 + 3) + 4 \equiv 5 \cdot 5 + 4 \equiv 4 + 4 \equiv 1 \pmod 7$, dvs i $\mathbb{Z}_7$. **Svar: 1.**

---

c) (1p) Ange en bijektiv funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$, där $\mathbb{R}$ betecknar de reella talen.

Lösning:

"Bijektiv" betyder "surjektiv och injektiv". Ett enkelt exempel är $\boldsymbol{f(x) = x}$.

3) (3p) beräkna den minsta gemensamma multipeln till de bägge talen 420 och 1188.

Lösning:

Euklides algoritm:

$1188 = 2 \cdot 420 + 348$
$420 = 1 \cdot 348 + 72$
$348 = 4 \cdot 72 + 60$
$72 = 1 \cdot 60 + 12$
$60 = 5 \cdot 12 + 0,$

så $\text{sgd}(420, 1188) = 12$ och $\text{mgm}(420, 1188) = \frac{420 \cdot 1188}{\text{sgd}(420,1188)} = \frac{420 \cdot 1188}{12} = 420 \cdot 99 = 42000 - 420 = 41580.$

Svar: $\mathbf{mgm(420, 1188) = 41580}$

---

4) (3p) Bestäm inversen till elementet 12 i ringen $\mathbb{Z}_{31}$.

Lösning:

Euklides algoritm igen:

$31 = 2 \cdot 12 + 7$
$12 = 1 \cdot 7 + 5$
$7 = 1 \cdot 5 + 2$
$5 = 2 \cdot 2 + 1,$

så $1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2(7 - 5) = -2 \cdot 7 + 3 \cdot 5 =$
$= -2 \cdot 7 + 3(12 - 7) = 3 \cdot 12 - 5 \cdot 7 =$
$= 3 \cdot 12 - 5(31 - 2 \cdot 12) = -5 \cdot 31 + 13 \cdot 12$
och $13 \cdot 12 \equiv 1 \pmod{31}$, dvs

Svar: $\mathbf{12^{-1} = 13}$ i $\mathbb{Z}_{31}$

---

5) (3p) Använd induktion för att visa att formeln $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ gäller för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Lösning:

Bas: $\text{VL}_1 = 1$, $\text{HL}_1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$. Påståendet stämmer för $n = 1$.

Steg: Antag $\text{VL}_n = \text{HL}_n$,
då $\text{VL}_{n+1} = 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \text{VL}_n + (n+1) =$
$\text{HL}_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$
$(n+1)(\frac{n}{2} + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \text{HL}_{n+1}$

Så $\text{VL}_1 = \text{HL}_1$ och $\text{VL}_n = \text{HL}_n \Rightarrow \text{VL}_{n+1} = \text{HL}_{n+1}$ för $n = 1, 2, \ldots$.
Enligt induktionsprincipen gäller påståendet för $n = 1, 2, \ldots$.
