

Svar till övning 10, den 18 maj 2010

1. Kalla hörnen (i ordning) 1,2,3,4,5. 1 kan färgas på λ sätt. För vart och ett av dessa fås två fall, om 2 och 5 har samma eller olika färger. I det senare fallet kan 3 ha samma färg som 5 eller inte. Man får $P_G(\lambda) = \lambda((\lambda-1)^2(\lambda-2) + (\lambda-1)(\lambda-2)((\lambda-1) + (\lambda-2)^2)) = \dots = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = (\lambda-1)^5 - (\lambda-1)$. Med rekursionsformeln, $P_{C_5}(\lambda) = P_{T_5}(\lambda) - P_{C_4}(\lambda) = P_{T_5}(\lambda) - (P_{T_4}(\lambda) - P_{C_3}(\lambda)) = \lambda(\lambda-1)^4 - \lambda(\lambda-1)^3 + \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) = \dots = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)((\lambda-1)^2 + 1)$. (T_n är ett träd med n hörn.)
2. Att de två högstgradstermerna är $\lambda^n - |E|\lambda^{n-1}$ visas med rekursionsformeln för $P_G(\lambda)$ och induktion över antalet kanter.
3. För var och en av de $P_{G_1}(\lambda)$ st färgningarna av G_1 finns det $\frac{P_{G_2}(\lambda)}{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-m+1)}$ färgningar av G_2 som fortsätter den. $P_{G_2}(\lambda)$ är ju nämligen $\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-m+1) \cdot (\text{antalet sätt färga } G_2 \text{ med givna (olika) färger för hörnen i } V_1 \cap V_2)$.
 $P_G(\lambda) = \frac{P_{C_3}(\lambda)^3}{\lambda \cdot \lambda(\lambda-1)} = \lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)^3$. (Fås också med kombinatoriskt resonemang.)
4. Tydligen måste den andra mängden representeras av 2, så den fjärde av 4 osv. Man får (entydigt) de olika representanterna (i ordning): 1,2,3,4,5. Halls sats ger att de senare mängderna saknar transversal, ty unionen av de 3 första, $\{1\} \cup \{1,3\} \cup \{1,3\} = \{1,3\}$, har bara 2 element.
5. T.ex. $\{a_1b_2, a_2b_1, a_3b_5, a_4b_4, a_5b_3\}$.
6. Utgående från a_5 finner man de utökande alternerande stigarna $a_5b_3a_1b_2$, $a_5b_4a_4b_2$ och $a_5b_4a_4b_1a_2b_2$. De leder alla till större, dvs fullständiga, matchningar. Den första ger den fullständiga matchningen i svaret till förra uppgiften.
7. Utgående från a_1 finner man tre olika utökande alternerande stigar, den kortaste är $a_1b_3a_3b_5$ och den längsta är en hamiltonstig från a_1 till b_5 . Den kortaste ger den fullständiga matchningen $\{a_1b_3, a_2b_1, a_3b_5, a_4b_2, a_5b_4\}$.
8. Vi skall visa att det finns en fullständig matchning i den bipartita grafen med elever och böcker som hörn och kanter från elever till de böcker de vill läsa. Från varje delmängd A av eleverna med $|A| = m$, går minst mk kanter, alla till $P(A)$. Men om $|P(A)| \leq m-1$ kan den "ta emot" högst $(m-1)k$ kanter. Så $|P(A)| \geq m$. Enligt Halls sats finns en fullständig matchning.
9. Det gäller att visa att det finns en fullständig matchning i den bipartita grafen med tentander och uppgifter som hörn och kanter precis då tentanden klarat uppgiften. Tag en delmängd A till tentanderna. Om $A \neq \emptyset$ är $|P(A)| \geq 4$ (varje tentand klarade minst 4 uppgifter) och om $|A| > 4$ är $|P(A)| = 10$ (varje uppgift klarades av minst 6 tentander, så någon i A). Halls sats ger resultatet.