

Exempel för övning 10, den 18 maj 2010

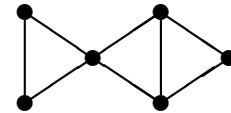
1. Bestäm det kromatiska polynomet $P_{C_5}(\lambda)$ för den cykliska grafen C_5 , med kombinatoriskt resonemang ("fall för fall") eller med rekursionsformeln för kromatiska polynom. Jämför med det allmänna uttrycket som härleddes på föreläsningen, $P_{C_n}(\lambda) = (\lambda - 1)^n + (-1)^n(\lambda - 1)$.

2. Visa att koefficienten för λ^{n-1} i det kromatiska polynomet $P_G(\lambda)$ är $-|E|$. n är antalet hörn i G .

3. Låt grafen $G = (V, E)$ vara graferna $G_1 = (V_1, E_1)$ och $G_2 = (V_2, E_2)$ "hopklistrade längs en K_m ", dvs $V = V_1 \cup V_2$, $E = E_1 \cup E_2$ och $(V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$ är en graf som är isomorf med den fullständiga grafen K_m .

Visa att det kromatiska polynomet $P_G(\lambda)$ ges av

$$P_G(\lambda) = \frac{P_{G_1}(\lambda) \cdot P_{G_2}(\lambda)}{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-m+1)}.$$



Illustrera med $P_G(\lambda)$ för grafen G här till höger.

4. Bestäm en transversal till mängderna $\{1, 2, 3\}$, $\{2\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 4\}$, $\{4, 5\}$ och förklara varför det inte finns någon transversal till mängderna $\{1\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$.

5. Finn en fullständig matchning i den bipartita graf som består av hörnmängderna $X = \{a_1, a_2, \dots, a_5\}$ och $Y = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_5\}$ och kantmängden $E = \{a_1b_2, a_1b_3, a_2b_1, a_2b_2, a_2b_4, a_3b_3, a_3b_5, a_4b_1, a_4b_2, a_4b_4, a_5b_3, a_5b_4\}$.

a_1b_2 etc står förstås för $\{a_1, b_2\}$ etc.

6. Betrakta samma bipartita graf som i föregående uppgift. Betrakta matchningen $M = \{a_1b_3, a_2b_1, a_3b_5, a_4b_4\}$ och finn en alternerande stig till M . Använd denna alternerande stig till att göra matchningen större.

7. Samma uppgift men med $M = \{a_2b_1, a_3b_3, a_4b_2, a_5b_4\}$.

8. Eleverna i en klass skall låna böcker. Visa att om varje elev vill läsa minst k (≥ 1) stycken av de tillgängliga böckerna och det för varje bok finns högst k stycken elever som vill läsa den, så kan varje elev låna en egen bok som den vill läsa.

9. Tio tentander har gjort en tentamen med tio uppgifter. Varje uppgift klarades av minst sex skrivande. Varje skrivande klarade minst fyra uppgifter. Visa att man kan fördela uppgifterna med en per tentand, så att var och en har klarat sin uppgift.

10**. A och B utför en kortkonst på följande sätt. A får fem kort som slumpvis dragits ur en kortlek, tittar på dem och lägger sedan efter varandra ut fyra av dem. B, som inte sett korten, talar då om vilket kort det femte är.

Hur bär de sig åt?