

Svar till övning 8, den 27 april 2010

1. Med beteckningarna A : "Det är måndag", B : "Det snöar" fås
 - α . "Att minst en av att det inte är måndag och att det snöar gäller medför att det inte är så att det är måndag om det snöar",
dvs "Att minst en av $\neg A$ och B gäller medför att det inte är så att A om B ",
dvs $\neg A \vee B \rightarrow \neg (B \rightarrow A)$.
 - β . "Det är inte så att det både är måndag och om och endast om det är måndag inte snöar",
dvs "Det är inte så att både A och A om och endast om $\neg B$ ",
dvs $\neg (A \wedge (A \leftrightarrow \neg B))$.
 - γ . "Det är inte så att det om och endast om det är måndag snöar",
dvs "Det är inte så att A om och endast om B ",
dvs $\neg (A \leftrightarrow B)$.

Sanningsvärdestabeller:

A	B	$\neg A$	$\vee$	B	$\rightarrow$	$\neg$	$(B \rightarrow A)$	$\neg$	$(A \wedge (A \leftrightarrow \neg B))$	$\neg$	$(A \leftrightarrow B)$
1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1

Eftersom de har samma sanningsvärde i alla tolkningar, är α och γ logiskt ekvivalenta, $\alpha \equiv \gamma$.

Med boolesk algebra: (med $a \rightarrow b = \bar{a} + b$ och $a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b)(b \rightarrow a) = (\bar{a} + b)(a + \bar{b}) = ab + \bar{a}\bar{b}$)

$$\alpha = \overline{\bar{a} + b + \bar{b} + a} = \bar{\bar{a}\bar{b} + \bar{b}\bar{a}} = ab + \bar{a}b,$$

$$\beta = a(\bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{b}) = \bar{a} + \bar{a}\bar{b} \cdot \bar{a}\bar{b} = \bar{a} + (\bar{a} + b)(a + \bar{b}) = \bar{a} + \bar{a}\bar{b} + ab = \bar{a} + ab = (\bar{a} + a)(\bar{a} + b) = \bar{a} + b (= a \rightarrow b),$$

$$\gamma = \overline{ab + \bar{a}\bar{b}} = (\bar{a} + \bar{b})(a + b) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}b.$$

$$2. p + p \cdot q = p \cdot 1 + p \cdot q = p \cdot (1 + q) = p \cdot (q + 1) = p \cdot 1 = p \text{ och (dualt) } p \cdot (p + q) = (p + 0) \cdot (p + q) = p + 0 \cdot q = p + q \cdot 0 = p + 0 = p.$$

Endera kan alternativt fås så: $p + p \cdot q = (p + p) \cdot (p + q) = p \cdot (p + q)$.

$$3. q = q \cdot 1 = q \cdot (p + \bar{p}) = q \cdot p + q \cdot \bar{p} = p \cdot q + \bar{p} \cdot q = 0 + \bar{p} \cdot q = p \cdot \bar{p} + \bar{p} \cdot q = \bar{p} \cdot p + \bar{p} \cdot q = \bar{p} \cdot (p + q) = \bar{p} \cdot 1 = \bar{p}.$$

$$4. \text{Karnaughdiagram ger: a. } x + \bar{z}, \quad \text{b. } \bar{x} + \bar{y}w, \quad \text{c. } z, \quad \text{d. } \bar{x}z + \bar{x}yw + yz\bar{w}.$$

5. Med n hörn i grafen är möjliga valenser $0, 1, \dots, n-1$, men 0 och $n-1$ kan inte båda förekomma om $n \neq 1$. Postfacksprincipen.

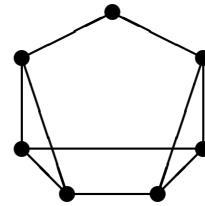
6. **Nej**. Den vänstra är inte bipartit (a, b, c alla grannar), men det är den högra (inga grannar av samma paritet).

7. Småkubernas grannförhållanden beskrivs av en bipartit graf, där mittkuben är av minoritetstyp.

8. i) 0,2,3,3,4,5 : omöjligt, ty summan av valenserna skall vara 2 gånger antalet kanter, ett jämnt tal.

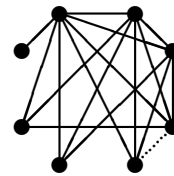
ii) 2,3,3,3,3,3,3 : möjligt, se figuren till höger.

iii) 2,2,3,5,5,5,6 : omöjligt, ty de tre första hörnen kan ha högst 7 kanter till de sista fyra, men dessa måste ha minst 9 kanter till de första tre (minst 2,2,2,3 "utåt").



9. T.ex. kubgrafen (hörn och kanter i en kub) och två stycken K_4 (som en graf).

10. Låt hörnens valenser vara 1, 3, 3, 4, 5, 6, 7, x . Summan av valenserna skall vara 2 gånger antalet kanter, ett jämnt tal, så x är udda och ≤ 7 . $x = 1$ är omöjligt, ty hörnen med valenser 6,7 medför att det går minst 3 kanter till varje par av hörn. $x = 7$ är också omöjligt, ty två hörn med valens 7 skulle innebära att alla hörn hade valens minst 2. $x = 3, 5$ går båda, se fig. (utan och med den prickade kanten). Ett sätt att finna dessa är att notera att en graf med valenser 1, 3, 3, 4, 5, 6, 7, x finns omm en med valenser 0, 2, 2, 3, 4, 5, $x - 1$ finns omm en med 1, 1, 2, 3, $x - 2$ finns omm en med 1, 2, 2, $x - 2$ finns etc.



11. En möjlighet är dessa grafer (boken ger andra i övning 6.31).

a.



b.



c.



d.



12. Enligt figuren är grafen bipartit. Eftersom den har ett udda antal hörn kan den inte ha någon hamiltoncykel (en sådan måste ha vartannat svart och vitt hörn, dvs lika många av vardera), så **svaret är nej**.

