

Svar till övning 6, den 30 mars 2010

1a. $\varphi = (1\ 6\ 4\ 5\ 2)(3\ 8\ 7)$, $\psi = (1\ 7\ 3\ 4)(2\ 8\ 5)(6)$

b. $\varphi\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 5 & 6 & 1 & 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 5)(2\ 7\ 8)(4\ 6)$,

$\psi\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 5 & 2 & 8 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 6)(2\ 7\ 4)(3\ 5\ 8)$

$\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 7 & 6 & 4 & 1 & 8 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 5\ 4\ 6)(3\ 7\ 8)$

$\psi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 7 & 3 & 8 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 3\ 7)(2\ 5\ 8)(6)$

c. $M_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_\psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ etc.

2a. I cykelform fås $\pi = (1\ 7\ 2)(3\ 6\ 9\ 8)(4\ 5)$, så $o(\pi) = \text{mgm}(3, 4, 2) = 12$.

b. En cykel $(x_1\ x_2\ \dots\ x_k)$ kan skrivas $(x_1\ x_k)(x_1\ x_{k-1})\dots(x_1\ x_2)$, så man får (bland andra möjligheter) med π enligt ovan att

$\pi = (1\ 7\ 2)(3\ 6\ 9\ 8)(4\ 5) = (1\ 2)(1\ 7)(3\ 8)(3\ 9)(3\ 6)(4\ 5)$.

Eftersom antalet transpositioner är jämnt, är π en jämn permutation. Det ses också av att antalet cykler av jämn längd (2 st) är jämnt och av att "n" (9) – antalet cykler (3) är jämnt.

3. $\chi = \pi^{-1}\sigma = (1\ 2\ 7)(3\ 8\ 9\ 6)(4\ 5)(1\ 5\ 3\ 9\ 6\ 8)(2\ 4) = (1\ 4\ 7)(2\ 5\ 8)(3\ 6\ 9)$,
 $\psi = \sigma\pi^{-1} = (1\ 5\ 3\ 9\ 6\ 8)(2\ 4)(1\ 2\ 7)(3\ 8\ 9\ 6)(4\ 5) = (1\ 4\ 3)(2\ 7\ 5)(6\ 9\ 8)$.

4a. $\pi = (1)(2\ 4\ 10\ 6\ 5)(3\ 7\ 8\ 11\ 9)(12)$.

Det sökta antalet är $o(\pi) = \text{mgm}(1, 5, 5, 1) = 5$.

b. Man får $\pi = (0)(1\ 3\ 9\ 5\ 4)(2\ 6\ 7\ 10\ 8)(11)$, så $\pi(i) \equiv 3 \cdot i \pmod{11}$. Det sökta antalet är $o(3)$ i $U(\mathbb{Z}_{11})$ (som är 5).

c. Som i b. finner man att $\pi(i) \equiv n \cdot i \pmod{mn-1}$. Det sökta antalet är $o(n)$ i $U(\mathbb{Z}_{mn-1})$, speciellt är det alltid en delare till $|U(\mathbb{Z}_{mn-1})|$ och därmed $\leq |U(\mathbb{Z}_{mn-1})|$.

d. En riffelblandning där översta och understa korten ligger kvar är fallet $m = 26, n = 2$, då är det sökta antalet $o(2)$ i $U(\mathbb{Z}_{51})$. Eftersom $|U(\mathbb{Z}_{51})| = 32$, måste $o(2)$ vara (1,) 2, 4, 8, 16 eller 32. Prövning ($2^2 = 4$, $2^4 = 4^2 = 16$, $2^8 = 16^2 = 1$ i $\mathbb{Z}_{51}$) visar att det i det fallet krävs 8 blandningar.

Den andra typen av riffelblandning, där det översta kortet hamnar näst överst, är fallet $m = 27, n = 2$ (tänkta "extrakort" överst och underst). Det sökta antalet är då $o(2)$ i $U(\mathbb{Z}_{53})$. Eftersom $|U(\mathbb{Z}_{53})| = 52$, måste $o(2)$ vara (1,) 2, 4, 13, 26 eller 52. Prövning ($2^2 = 4$, $2^4 = 4^2 = 16$, $2^{13} = 2^8 \cdot 2^4 \cdot 2 = 16^2 \cdot 16 \cdot 2 = 44 \cdot 16 \cdot 2 = 30$, $2^{26} = 30^2 = 52 = -1$) ger att det nu krävs 52 blandningar.

5a. Rotationsaxlar och speglingsplan nedan går genom tetraederns tyngdpunkt.

Typ	Antal	Paritet	Exempel	Stel avbildning av rummet
$[1^4]$	1	jämn	$id = (1)$	identitetsavbildningen
$[1^2 2]$	6	udda	$(1\ 2)$	spegling i ett plan innehållande kanten 34
$[2^2]$	3	jämna	$(1\ 2)(3\ 4)$	rotation π kring en axel genom 12:s och 34:s mittpunkter
$[13]$	8	jämna	$(1\ 2\ 3)$	rotation $\pm \frac{2\pi}{3}$ kring en axel genom 4
$[4]$	6	udda	$(1\ 2\ 3\ 4)$	rotation $\pm \frac{\pi}{2}$ kring en axel genom 13:s och 24:s mittpunkter, följt av en spegling i ett plan vinkelrätt mot axeln

b. Jämna permutationer svarar mot rotationer, udda mot avbildningar som innehåller (ett udda antal) speglingar. Determinanten för avbildningen är alltså tecknet för permutationen.

c. N är (ändlig och) sluten under gruppoperationen, alltså en delgrupp.

$$(1\ 2)N = \{(1\ 2), (3\ 4), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 4\ 2\ 3)\} = N(1\ 2)$$

$$(1\ 3)N = \{(1\ 3), (2\ 4), (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 4\ 3\ 2)\} = N(1\ 3)$$

$$(1\ 4)N = \{(1\ 4), (2\ 3), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 4\ 2)\} = N(1\ 4)$$

$$(1\ 2\ 3)N = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 2), (2\ 4\ 3)\} = N(1\ 2\ 3)$$

$$(1\ 3\ 2)N = \{(1\ 3\ 2), (1\ 4\ 3), (1\ 2\ 4), (2\ 3\ 4)\} = N(1\ 3\ 2)$$

Alla vänstersidoklasser är alltså högersidoklasser (också N själv, förstås), så N är en normal delgrupp.

(Att N är normal följer också av att $gNg^{-1} = \{gng^{-1} \mid n \in N\}$ och N består av hela konjugatklasser ($[1^4]$ och $[2^2]$) av element i G .)

Eftersom operationen i kvotgruppen G/N ges av $(g_1N)(g_2N) = (g_1g_2)N$ och varje sidoklass innehåller precis en permutation π med $\pi(4) = 4$, är G/N isomorf med gruppen av dem, så med S_3 , $G/N \approx S_3$.

6. Låt $\pi \in S_6$ ges av att $\pi(x) = y$ omm brodern till kvinnan i hus x bor i hus y . Systemen till mannen i hus x bor då i hus $\pi^{-1}(x)$.

Inga syskon bor i samma hus (dvs är gifta med varandra) eller i grannhus, så för alla $x = 1, 2, \dots, 6$ gäller $\pi(x) \neq x, x \pm 1$. Speciellt saknar π 1-cykler, så dess cykelstruktur är någon av $[6]$, $[42]$, $[3^2]$ och $[2^3]$. Men $\pi(1) = \pi^{-1}(1)$ och $\pi(2) \neq \pi^{-1}(2)$, så 1, men inte 2, ingår i en 2-cykel. **π :s typ är alltså $[42]$.**

a. 2:s cykel består av fyra av husen 2–6 (inte 1, ty 1 ingår inte i den cykeln). Eftersom x och $\pi(x)$ inte kan vara grannhus, kan tre hus i rad inte ingå i en 4-cykel (det mellersta skall ha olika hus före och efter sig i cykeln, endera vore ett grannhus), så den måste bestå av husen 2, 3, 5 och 6. 2-cykeln är alltså $(1\ 4)$ och **Anna bor i hus 4.**

b. Vi skall finna $\pi(x)$ för alla $x = 1, 2, \dots, 6$ och vet redan $\pi(4) = 1$, $\pi(1) = 4$. 2, 3, 5, 6 bildar en 4-cykel och $\pi(6) \neq 2, 5$ (Börje är inte Cecilias bror, Cecilia inte granne med sin bror), så $\pi(6) = 3$ och därmed $\pi(3) = 5$ (inte grannhuset 2) och $\pi(5) = 2$, $\pi(2) = 6$, så $\pi = (1\ 4)(2\ 6\ 3\ 5)$ och svaret:

Fru i hus	1	2	3	4	5	6
har sin bror i hus	4	6	5	1	2	3