

Exempel för övning 6, den 30 mars 2010

1. Låt φ och ψ beteckna nedanstående permutationer (givna på tvåradsform) på mängden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 8 & 5 & 2 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 1 & 2 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

- Skriv permutationerna φ och ψ som produkter av disjunkta cykler.
- Beräkna $\varphi\psi$, $\psi\varphi$, φ^{-1} och ψ^{-1} , dels på tvåradsform och dels på cykelform.
- Bestäm permutationsmatriserna M_φ , M_ψ och $M_{\varphi\psi}$ och verifiera att $M_{\varphi\psi} = M_\varphi M_\psi$.

2. Betrakta permutationen $\pi \in S_9$, som på tvåradsform ges av

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 1 & 6 & 5 & 4 & 9 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

- Bestäm π :s ordning.
- Skriv π som en produkt av transpositioner.
Är π en jämn eller en udda permutation?
Verifiera genom att räkna cykler i π .

3. Finn permutationer χ, ψ så att $\pi\chi = \sigma$, $\psi\pi = \sigma$, med π som ovan och

$$\sigma = (1\ 5\ 3\ 9\ 6\ 8)(2\ 4) \quad (\text{cykelform}).$$

4. 12 kort ligger ordnade rektangulärt, i 4 rader och 3 kolumner. Korten plockas upp radvis och läggs sedan ut kolumnvis i samma ordning, så att korten flyttas som i figuren.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{array} \quad \longmapsto \quad \begin{array}{ccc} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{array}$$

- Efter hur många upprepningar av detta är alla kort åter i utgångsläget? Numrera positionerna som till vänster och beskriv operationen med $\pi \in S_{12}$, där $\pi(i) = j$ betyder att kortet i position i hamnar i position j (dvs $\pi(1) = 1$, $\pi(2) = 4, \dots$).
- Numrera i stället positionerna $0, 1, 2, \dots, 11$ och visa hur permutationen kan beskrivas med modulatoräkning.
- Vilket villkor bestämmer antalet nödvändiga upprepningar om det är m rader och n kolumner?
- Hur många gånger måste en perfekt riffelblandning av en kortlek upprepas för att alla korten skall komma till utgångsläget (två fall)?

5. Låt G vara S_4 , gruppen av permutationer av $\{1, 2, 3, 4\}$, och $N \subset G$ ges av (med elementen i cykelform) $N = \{(1), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$.

a. Kalla hörnen i en regelbunden tetraeder för 1, 2, 3, 4. Elementen i G svarar då mot stela (dvs avståndsbevarande) avbildningar av rummet, vilka lämnar tetraedern invariant men permuterar hörnen.

Ange för varje konjugatklass i G hurdana avbildningar dess element motsvarar.

b. Vilken typ av avbildning motsvarar jämna respektive udda permutationer i G ?

c. Visa att N är en normal delgrupp till G och beskriv kvotgruppen G/N (dvs ange en känd grupp som är isomorf med G/N).

6. I en radhuslänga med sex hus (med nr, i ordning, 1–6) bor sex gifta par (vart och ett bestående av en kvinna och en man), ett par i varje hus.

Var och en av kvinnorna har också (precis) en bror bland de sex männen och omvänt. Ingen bor granne med, eller är gift med, sin syster eller bror.

Anders har bara ett grannhus och bara en svåger (han bor i det ena gavelhuset, nr 1, och hans frus bror är hans systers man). Anders granne Börje däremot, har både två grannhus (förstås) och två svågrar.

a. I vilket hus bor Anders syster Anna?

b. I det andra gavelhuset, nr 6, bor Cecilia med sin man. Börjes syster heter Birgitta. Ange var vart hus frus bror bor.

7.** 100 personer (alla med olika namn) får ett märkligt erbjudande.

I ett rum står, får de veta, 100 lådor, numrerade från 1 till 100. Var och en av personerna får skriva sitt namn på en lapp och de hundra lapparna fördelas slumpmässigt i lådorna, en i varje låda.

Varje person skall sedan gå in i rummet och läsa namnet i en av lådorna. Om det inte är hans eget namn får han försöka en annan låda osv. Om han finner sitt eget namn genom att titta på högst 50 av dem, har han lyckats och skall lämna rummet precis som han fann det (och inte kommunicera med de andra) och nästa person komma in och försöka.

Om de **alla** lyckas, dvs finner lappen med sitt eget namn får de säckvis med guldpengar att dela på, annars (om en enda av dem misslyckas) får de ingenting.

a. Vad är sannolikheten att de skall få pengarna om de inte heller får ha kontakt innan de går in (och saknar andra ledtrådar, typ röntgenblick)?

b. Visa att de om de i förväg får bestämma en gemensam strategi kan öka sannolikheten att de skall få pengarna till över 30%(!).