

Exempel för övning 5, den 11 mars 2010

1. Det går att fylla i vidstående tabell så att den blir multiplikationstabellen för en grupp, dess grupptabell. Gör det.

a. Är gruppen abelsk?

b. Vilket element är identitets-element?

c. Bestäm inverser till alla element.

d. Bestäm ordningen för alla element och alla cykliska delgrupper till gruppen.

e. Beräkna $a * b * c * d * f * g$. (Behövs här inga parenteser?)

*	a	b	c	d	f	g
a			c			
b					d	c
c		f		g		
d				a		b
f		c	d			
g					a	

2. Låt $G_1 = (\mathbb{Z}_8, +)$ och $G_2 = (U(\mathbb{Z}_{15}), \cdot)$, där $U(\mathbb{Z}_{15})$ består av de inverterbara elementen i $\mathbb{Z}_{15}$.

a. Skriv upp grupptabellerna för G_1 och G_2 .

b. Bestäm ordningen för alla element i G_1 och G_2 .

c. Finn alla cykliska delgrupper till G_1 och G_2 och deras sidoklasser.

d. Finn alla delgrupper till G_1 och G_2 och deras sidoklasser.

e. Är någon av grupperna G_1 och G_2 cyklisk?

3. $(U(\mathbb{Z}_8), \cdot)$ och $(U(\mathbb{Z}_{14}), \cdot)$ är grupper. Undersök om de är cykliska.

4. Gruppen $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, \cdot)$ är cyklisk. Bestäm alla dess generatorer.

5. $(U(\mathbb{Z}_{64}), \cdot)$ är en grupp. Visa att varje element g i den satisfierar $g^{32} = 1$.

6. Den **direkta produkten** av två grupper $(G_1, *_1)$ och $(G_2, *_2)$ definieras som gruppen $(G_1 \times G_2, \circ)$ där för $(g_1, g_2), (h_1, h_2) \in G_1 \times G_2$:

$$(g_1, g_2) \circ (h_1, h_2) = (g_1 *_1 h_1, g_2 *_2 h_2).$$

a. Verifiera att den direkta produkten av två grupper också är en grupp.

b. Visa att gruppen $(\mathbb{Z}_2, +) \times (\mathbb{Z}_3, +)$ är isomorf med gruppen $(\mathbb{Z}_6, +)$.

c. Visa att gruppen $(\mathbb{Z}_3, +) \times (\mathbb{Z}_3, +)$ inte är isomorf med gruppen $(\mathbb{Z}_9, +)$.

7. En given grupp G har delgrupper H och K med 39 respektive 40 element. Bestäm m , det minsta möjliga värdet för $|G|$.

Konstruera också en grupp G med m element som har delgrupper med 39 resp. 40 element.

8. Visa att vidstående tabell inte kan fyllas i så att den blir en grupptabell.

$*$	a	b	c	d	f	g	h	i	k
a	a	b							
b	b	a							
c									
d									
f									
g									
h									
i									
k									

- 9**. Givet fyra linjer i planet, inga två parallella och inga tre genom samma punkt.

Längs varje linje kryper en lus, var och en med sin konstanta hastighet. Visa att om två löss möts (utan att stanna upp) vid fem av linjernas skärningspunkter, så möts också två löss vid den sjätte skärningspunkten.

- 10*. I en population med speciella (matematiska) kameleonter finns vid ett tillfälle 116 röda, 97 gula och 84 blå individer.

När två olikfärgade av dessa kameleonter möts, byter de båda färg till den tredje färgen. Kan färgförändringarna upphöra, dvs kan det hända att alla kameleonerna till sist får samma färg?