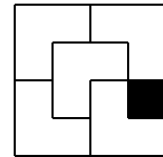


Exempel för övning 2, den 4 februari 2010

1. Finn alla heltal x så att $16x \equiv 26 \pmod{42}$.
2. Finn alla heltal x så att $x \equiv 5 \pmod{8}$ och $x \equiv 73 \pmod{81}$.
3. Visa (t.ex. med ett Venndiagram) att för godtyckliga mängder A, B gäller $((A^c \cup B^c) \setminus A)^c = A$.

4. En kvadrat med sida 1024 är uppdelad i 1024×1024 rutor med sida 1. Visa att om man tar bort en av dessa rutor, kan resten av kvadraten täckas av "L-formade" bitar med 3 rutor.



I figuren visas ett möjligt fall för en kvadrat med sida 4.

5. Minns **fibonaccitalen** F_n : $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$, rekursivt definierade av

$$\begin{cases} F_0 = 0, & F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, & n = 0, 1, \dots \end{cases}.$$

Visa att för alla $n = 1, 2, \dots$ gäller

$$F_1^2 + \dots + F_n^2 = \sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1} \text{ och } \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n.$$

6. Ge exempel på mängder X, Y, Z och funktioner $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, så att sammansättningen $gf: X \rightarrow Z$ är en bijektion, trots att varken f eller g är det.

Lite svårare: Samma uppgift, men med kravet att $X = Y = Z$.

7. Låt A vara en mängd och $f: A \rightarrow A$ en funktion sådan att $ff = id_A$, dvs $f(f(x)) = x$ för alla $x \in A$. Visa att f är en bijektion.

- 8*. Talet 2^{29} har (i bas 10) 9 siffror, alla olika. Vilken siffra fattas?

- 9*. Enligt den sats av Cantor som presenterades på föreläsningen är potensmängden till $\mathbb{N}$ inte uppräknelig, dvs det finns överuppräkneligt många mängder av naturliga tal, $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}|$.

Visa att antalet **ändliga** mängder av naturliga tal är uppräkneligt, dvs

$$|\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})| = |\mathbb{N}|,$$

där $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}) = \{A \mid A \subset \mathbb{N}, |A| < \infty\}$.

Ledning: Det finns en enkel bijektion mellan $\mathbb{N}$ och $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$. Tänk binära tal!

- 10**. Visa för fibonaccitalen $\{F_n\}_{n=0}^\infty$ att $sgd(F_m, F_n) = F_{sgd(m,n)}$.

- 11**. Två fyrar blinkar med intervall α respektive β (minuter). α och β är irrationella tal sådana att $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ (dvs i medeltal kommer ett blink per minut). Visa att om de båda blinkar vid tiden $t = 0$ kommer det under "heltalsminuten" mellan $n - 1$ och n precis ett blink, för alla heltal $n > 1$.

- 12**. Vilka siffror är de 100:e decimalerna i $(\sqrt{2}+1)^{1000}$ respektive $(\sqrt{2}+1)^{1001}$?