

Lösningar tenta TENA SF1630(/1631) DISKRET MATEMATIK, D3 m.fl.
26 oktober 2017

Tryckfel kan förekomma.

- 1a) (1p) Graferna $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ är **isomorfa** omm det finns en bijektion $\phi: V_1 \rightarrow V_2$ sådan att för alla $x, y \in V_1$ gäller att $\{x, y\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\phi(x), \phi(y)\} \in E_2$.
b) (1p) En hamiltoncykel i en graf $G = (V, E)$ är en cykel som passerar varje hörn precis en gång (= en följd $v_1, v_2, \dots, v_n$ av alla hörnen i V , där $\{v_i, v_{i+1}\}, \{v_n, v_1\} \in E$ för $i = 1, \dots, n-1$).
c) (1p) **Halls sats**: en bipartit graf $(X \cup Y, E)$ har en fullständig matchning av X -hörnen omm för varje $A \subseteq X$ gäller $|J(A)| \geq |A|$, där $J(A) = \{y \in Y \mid \{a, y\} \in E \text{ för något } a \in A\}$.
-

- 2a) (1p) Det finns $x, y \in \mathbb{Z}$ med $mx + ny = c$ omm $\text{sgd}(m, n) \mid c$.
b) (1p) $f: X \rightarrow Y$ är en **surjektion** omm för varje $y \in Y$ finns minst ett $x \in X$ med $y = f(x)$.
c) (1p) **Postfacksprincipen** säger att om X, Y är mängder med $|X| > |Y|$ så finns ingen injektion $f: X \rightarrow Y$ (dvs för alla $f: X \rightarrow Y$ finns $x_1, x_2 \in X$ med $f(x_1) = f(x_2)$).
-

- 3a) (1p) En binär relation $\mathcal{R}$ på en mängd X är **transitiv** omm $(x\mathcal{R}y \text{ och } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$ för alla $x, y, z \in X$.
b) $\binom{367}{143} + \binom{368}{143} + \binom{367}{144} = \binom{368}{143} + (\binom{367}{143} + \binom{367}{144}) = \binom{368}{143} + \binom{368}{144} = \binom{369}{144}$.
c) **Principen om inklusion och exklusion** för tre mängder A, B, C säger att $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$.
-

- 4a) (1p) **Möbius μ -funktion** ges av $\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ (-1)^k, & n \text{ en produkt av } k \text{ olika primtal,} \\ 0, & n \text{ delbart med någon primtalskvadrat.} \end{cases}$

- b) (1p) $\pi\sigma = \pi(\sigma\pi)\pi^{-1}$, så enligt definitionen är de konjugerade. (Alt. $\sigma\pi = \sigma(\pi\sigma)\sigma^{-1}$).
c) (1p) $\pi \in S_n$ är jämn/udda omm det totala antalet cykler av jämn längd är jämnt/udda.
-

- 5) (3p) Alla hörn i den sammanhängande plana grafen $G = (V, E)$ har valens 3 eller 5 och alla begränsade ytor har 4 kanter. Vi söker antalet hörn med valens 5 och antalet ytor med 4 kanter, då 13 av hörnen har valens 3 och den obegränsade ytan har 6 kanter.

Lösning:

Låt antalet kanter vara e , antalet hörn med valens 5 x och antalet ytor med 4 kanter y .
Då gäller (med vanliga beteckningar) $2e = \sum \delta(v_i) = 3 \cdot 13 + 5x = 39 + 5x$ och motsvarande för ytor, $2e = 6 + 4y$. Eulers polyederformel (grafens är ju plan och sammanhängande) ger $v - e + r = 13 + x - e + y + 1 = 2$.

$$\text{Så } \begin{cases} 5x - 2e = -39 \\ 4y - 2e = -6 \\ x + y - e = -12 \end{cases} \quad \text{Lösning av ekvationssystemet ger } x = 3, y = 12 \text{ (och } e = 27\text{).}$$

Svar: 3 hörn har valens 5 och 12 ytor har 4 kanter.

- 6) (3p) Vi söker alla $x \in \mathbb{Z}_{161}$ som uppfyller $112x + 98 = 0$.

Lösning:

Ekvationen svarar mot $112x + 98 = 161k$, dvs $112x - 161k = -98$, för något $k \in \mathbb{Z}$.

Eftersom $161 = 112 \cdot 1 + 49$, $112 = 49 \cdot 2 + 14$, $49 = 14 \cdot 3 + 7$, $14 = 7 \cdot 2$, är enligt Euklides $\text{sgd}(112, 161) = 7$ och vi finner

$$7 = 49 - 3 \cdot (112 - 2 \cdot 49) = -3 \cdot 112 + 7 \cdot (161 - 112) = 7 \cdot 161 - 10 \cdot 112.$$

Multiplikation med -14 ger $-98 = 112 \cdot 140 - 161 \cdot 98$, så $x_0 = 140$, $k_0 = 98$ är en lösning.

Vår ekvation är ekvivalent med $112(x - x_0) = 161(k - k_0)$, dvs (dividera med $\text{sgd}(112, 161) = 7$) $16(x - x_0) = 23(k - k_0)$. Alla x -lösningar ges av $x = x_0 + 23n$, $n \in \mathbb{Z}$ (ty $\text{sgd}(16, 23) = 1$).

Lösningar i $\mathbb{Z}_{161}$ fås då $n = -6, -5, \dots, 0$. De blir $x = 2, 25, 48, 71, 94, 117, 140$.

(**Alternativt:** $112x + 98 \equiv_{161} 0 \Leftrightarrow 16x + 14 \equiv_{23} 0$ (delat med 7, också i modulen) och med $0 \equiv_{23} 48x + 42 \equiv_{23} 2x + 19$ (multipliserat med 3, ok ty $\text{sgd}(3, 23) = 1$) och $0 \equiv_{23} 24x + 228 \equiv_{23} x - 2$ ($\text{sgd}(12, 23) = 1$) och $x = 2 + 23n$ etc som ovan.)

Svar: Alla lösningar i $\mathbb{Z}_{161}$ är 2, 25, 48, 71, 94, 117, 140.

7) (3p) Vi söker antalet sätt att placera 10 identiska svarta och 10 olika kulörta kulor i två olika lådor, med 10 kulor, varav minst två svarta, i varje låda.

Lösning:

Med bara kulörta kulor inbördes särskiljbara ges det sökta antalet av antalet sätt att välja vilka av dem som läggs i första lådan (2^{10}) – antalet av dessa som har för få svarta kulor i någon låda ($1 + 10 + 10 + 1 = 22$ (antalet sätt med 0,1,9,10 svarta kulor i låda 1)), så $2^{10} - 22$ sätt.

Svar: $2^{10} - 22 (= 1002)$ sätt.

8) $\pi, \sigma \in S_8$ ges av tabellen. Vi söker (a, 1p) π, π^{-1} och $\pi\sigma$ på cykelform och (b, 2p) $\tau \in S_8$ med $\pi = \tau\sigma^2\tau^{-1}$ eller skall visa att inget sådant τ existerar.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi(i)$	7	6	1	8	5	2	3	4
$\sigma(i)$	6	8	3	7	2	4	1	5

Lösning:

a. $\pi(1) = 7, \pi(7) = 3, \dots$ ger $\pi = (1\ 7\ 3)(2\ 6)(4\ 8)$, så $\pi^{-1} = (1\ 3\ 7)(2\ 6)(4\ 8)$.

P.s.s. fås $\sigma = (1\ 6\ 4\ 7)(2\ 8\ 5)$, så $\pi\sigma = (1\ 7\ 3)(2\ 6)(4\ 8)(1\ 6\ 4\ 7)(2\ 8\ 5) = (1\ 2\ 4\ 3)(5\ 6\ 8)$.

b. π och $\sigma^2 = (1\ 4)(6\ 7)(2\ 5\ 8)$ har samma cykelstruktur ($[1\ 2^2\ 3]$), så de är konjugerade och sådana τ existerar. $\tau(x_1\ x_2\ \dots)\tau^{-1} = (\tau(x_1)\ \tau(x_2)\ \dots)$, så

i	1	4	6	7	2	5	8	3
$\tau(i)$	2	6	4	8	1	7	3	5

vi kan (t.ex.) välja τ enligt tabellen, $\tau = (1\ 2)(3\ 5\ 7\ 8)(4\ 6)$.

Svar a: $\pi = (1\ 7\ 3)(2\ 6)(4\ 8), \pi^{-1} = (1\ 3\ 7)(2\ 6)(4\ 8), \pi\sigma = (1\ 2\ 4\ 3)(5\ 6\ 8),$

b: Ett sådant $\tau = (1\ 2)(3\ 5\ 7\ 8)(4\ 6)$ (det finns 24 möjligheter).

9) (4p) För ekvivalensrelationen $\mathcal{R}$ på $\mathcal{M} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ gäller att $(2, 7) \in \mathcal{R}$, $(2, 8) \notin \mathcal{R}$ och $(x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow (\pi(x), \pi(y)) \in \mathcal{R}$ för alla $x, y \in \mathcal{M}$ (π enligt uppgift 8).

Vi söker $\mathcal{R}$ som delar in $\mathcal{M}$ i dels så många och dels så få ekvivalensklasser som möjligt.

Lösning:

$\pi = (1\ 7\ 3)(2\ 6)(4\ 8)$ ger $(2, 7) \in \mathcal{R} \Rightarrow (\pi(2), \pi(7)) = (6, 3) \in \mathcal{R} \Rightarrow (2, 1) \in \mathcal{R} \Rightarrow (6, 7) \in \mathcal{R}$, så 1, 2, 3, 6 och 7 måste ligga i samma ekvivalensklass.

$(2, 8) \notin \mathcal{R} \Rightarrow (\pi(2), \pi(8)) = (6, 4) \notin \mathcal{R}$, så 4 och 8 ligger inte i ekvivalensklassen ovan.

Flest ekvivalensklasser får man genom att bara låta $\mathcal{R}$ gälla då det tvingas enligt ovan (+ av att det är en ekvivalensrelation), det ger ekvivalensklasserna $\{1, 2, 3, 6, 7\}, \{4\}, \{5\}, \{8\}$.

Färst ekvivalensklasser fås genom att låta $\mathcal{R}$ gälla utom då det är förbjudet enligt ovan, t.ex. med klasserna $\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}, \{4, 8\}$ (eller med 5 i den andra klassen).

Eftersom dessa ekvivalensklasser är partitioner av $\mathcal{M}$, ger de ekvivalensrelationer $\mathcal{R}$.

Villkoren på $\mathcal{R}$ blir uppfyllda, ty $x, y \in \mathcal{M}$ i samma/olika klass(er) (dvs $x\mathcal{R}y/x \not\mathcal{R}y$) $\Rightarrow \Rightarrow \pi(x), \pi(y)$ likaså, och eftersom $\pi^5 = \pi^{-1}$ gäller också $\Leftarrow$.

Svar: Flest med $\{1, 2, 3, 6, 7\}, \{4\}, \{5\}, \{8\}$, färst med $\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}, \{4, 8\}$.

10) En tentamen har 10 uppgifter som vardera kan ge 0, 1 eller 2 poäng. Vi söker (a, 1p) antalet olika poängfördelningar, (b, 1p) antalet av dem som har minst en uppgift var med 0, 1 och 2 poäng och (c, 2p) antalet med minst två uppgifter var med 0, 1 och 2 poäng.

Lösning:

a. Fördelningarna motsvarar funktioner $f: \{\text{uppgifter}\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$, så antalet olika är 3^{10} .

b. Alla möjliga utfall skall antas minst en gång, så det sökta antalet = antalet surjektioner från en 10-mängd till en 3-mängd = $3! \cdot S(10, 3)$. Med "Stirlings triangel" (dvs rekursionsformeln för Stirlingtalen) fås $S(10, 3) = 9\ 330$, så antalet är $6 \cdot 9\ 330 = 55\ 980$.

Alternativt kan man använda sällprincipen. Som i c. får man alla fördelningar utan minst en av 0, 1 och 2 poäng:

$$3^{10} - 3 \cdot 2^{10} + 3 \cdot 1^{10} - 0^{10} = 59\ 049 - 3\ 072 + 3 - 0 = 55\ 980.$$

c. Vi använder sällprincipen. Låt X vara alla fördelningar och A_0, A_1, A_2 alla fördelningar med 0, 1 resp. 2 **högst en gång**. Då är $|A_i| = 2^{10} + 10 \cdot 2^9 = 6\ 144$ (de utan i + de med exakt ett i), $|A_i \cap A_j| = 1 + 10 + 10 + 10 \cdot 9 = 111$ (om $i \neq j$) (de utan i, j + de med ett i , inget j + de utan i , ett j + de med ett i , ett j) och $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 0$ (om i, j, k alla olika) (inga med högst ett vardera av 0, 1, 2). Så det sökta antalet: $|X \setminus (A_0 \cup A_1 \cup A_2)| = |X| - (|A_0| + |A_1| + |A_2|) + (|A_0 \cap A_1| + |A_1 \cap A_2| + |A_2 \cap A_0|) - |A_0 \cap A_1 \cap A_2| = 59\ 049 - 3 \cdot 6\ 144 + 3 \cdot 111 - 0 = 59\ 049 - 18\ 432 + 333 - 0 = 40\ 950$.

Svar a: $3^{10} (= 59\ 049)$, **b:** 55 980, **c:** 40 950 olika fördelningar.

11) (4p) Vi söker alla $k \in \mathbb{Z}$ med $292^k = 52$ i $\mathbb{Z}_{693}$.

Lösning:

Vi använder kinesiska restsatsen med isomorfin $(\mathbb{Z}_{693}, +, \cdot) \cong (\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$ given av bijektionen f , med $f(292) = (5, 4, 6)$ (ty $292 \equiv_7 5, \equiv_9 4, \equiv_{11} 6$) och $f(52) = (3, 7, 8)$.

$f(292^k) = (5^k, 4^k, 6^k)$, så $292^k \equiv_{693} 52 \Leftrightarrow (5^k \equiv_7 3, 4^k \equiv_9 7 \text{ och } 6^k \equiv_{11} 8)$.

I $\mathbb{Z}_7$: $5^2 = 25 = 4$, $5^3 = 5 \cdot 4 = 6$, $5^4 = 5 \cdot 6 = 2$ $5^5 = 5 \cdot 2 = 3$, $5^6 = 5 \cdot 3 = 1$.

I $\mathbb{Z}_9$: $4^2 = 16 = 7$, $4^3 = 4 \cdot 7 = 1$.

I $\mathbb{Z}_{11}$: $6^2 = 36 = 3$, $6^3 = 6 \cdot 3 = 7$, $6^4 = 6 \cdot 7 = 9$, $6^5 = 6 \cdot 9 = 10$, $6^6 = 6 \cdot 10 = 5$,

$6^7 = 6 \cdot 5 = 8$, $6^8 = 6 \cdot 8 = 4$, $6^9 = 6 \cdot 4 = 2$, $6^{10} = 6 \cdot 2 = 1$.

Således, $292^k = 52$ i $\mathbb{Z}_{693} \Leftrightarrow k \equiv_5 5, \equiv_3 2, \equiv_{10} 7$. Det första villkoret ger $k = 5 + 6s$ för något $s \in \mathbb{Z}$, som uppfyller $5 + 6s \equiv_3 2$ (sant för alla $s \in \mathbb{Z}$) och $5 + 6s \equiv_{10} 7 \Leftrightarrow 6s \equiv_{10} 2 \Leftrightarrow 3s \equiv_5 1 \Leftrightarrow s \equiv_5 2$, så alla lösningar ges av $k = 5 + 6 \cdot (2 + 5n) = 17 + 30n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Svar: Alla sådana k ges av $k = 17 + 30n$, $n \in \mathbb{Z}$.

12) (5p) $G = (V, E)$ är en graf med $\delta(v) \geq 2$ för alla $v \in V$. Vi skall visa att det finns en sammanhängande graf $G' = (V, E')$ med $\delta(v) = \delta'(v)$ för alla $v \in V$.

Lösning:

Induktion över antalet komponenter i G .

Bas: Om G har 0 eller 1 komponenter kan vi ta $G' = G$. Basen är klar.

Steg: Antag påståendet sant för alla grafer med $k \geq 1$ komponenter och låt G ha $k + 1$ st. I varje komponent finns minst en cykel (ty annars vore den ett icke-tomt träd, så antalet kanter mindre än antalet hörn i den, men $\delta(v) \geq 2$ för alla $v \in V$ ger att antalet kanter $\geq$ antalet hörn (summan av valenserna är dubbla antalet kanter)).

Låt $\{u_1, v_1\}$ och $\{u_2, v_2\}$ vara kanter som ingår i cykler i två olika komponenter (finns, ty $k + 1 \geq 2$). Låt $G^* = (V, E^*)$, där $E^* = (E \setminus \{\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\}\}) \cup \{\{u_1, u_2\}, \{v_1, v_2\}\}$.

G^* har då samma hörn med samma valenser som G och k komponenter (eftersom $\{u_i, v_i\}$ låg i cykler delades deras komponenter inte upp då kanterna togs bort). Enligt antagande finns G' med samma hörn och valenser som G^* och därmed samma som G . Därmed är steget klart.

Påståendet följer med induktion.

Saken är klar.

13) (5p) Vi skall visa att $n \in \mathbb{Z}_+$ uppfyller $\prod_{d|n} d = n^2$ om och endast om n är 1, p^3 (p primtal) eller pq (p, q olika primtal).

Lösning:

Det finns tydligen bara två fall för $n \in \mathbb{Z}_+$:

Fall 1: $n = p^r$, en potens av ett primtal p , $r \geq 0$. Alla delare till n är då $1, p, p^2, \dots, p^r$, så $\prod_{d|n} d = 1 \cdot p \cdot p^2 \cdot \dots \cdot p^r = p^{0+1+2+\dots+r} = p^{\frac{r(r+1)}{2}}$. Således $\prod_{d|n} d = n^2 = p^{2r}$ omm $\frac{r(r+1)}{2} = 2r$ dvs omm $r = 0$ eller $r = 3$, dvs $n = 1$ eller $n = p^3$.

Fall 2: n är delbart med två olika primtal p, q . Då är $n = pqm$, för något $m \in \mathbb{Z}_+$, och n har (de olika) delarna pm, qm, pqm , så $\prod_{d|n} d \geq pm \cdot qm \cdot pqm = p^2 q^2 m^3 = n^2 \cdot m$. Om $\prod_{d|n} d = n^2$ måste alltså $m = 1$ och $n = pq$. Å andra sidan, om $n = pq$, p, q olika primtal, är alla n :s delare $1, p, q, pq$ och $\prod_{d|n} d = 1 \cdot p \cdot q \cdot pq = p^2 q^2 = n^2$.

Saken är klar.