

Matematik, KTH

B.Ek

Tentamen TENA i kurs
SF1630(/SF1631), DISKRET MATEMATIK för D
torsdagen den 26 oktober 2017, klockan 8.00–13.00.

Examinator: Bengt Ek, tel 790 6951.

Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Maximal poäng på de olika delarna är T: 12p, P1: 12p, P2: 12p, P3: 10p.

För **godkänt** krävs minst 9p på var och en av delarna T och P1.

För betyg A–E krävs **dels** godkänt och **dels** poäng enligt:

För betyg	A	B	C	D	E	
krävs totalt	37	32	-	25	-	poäng
varav	-	12	8	-	-	på delarna P2 och P3 tillsammans
och	5	-	-	-	-	på del P3

Omdömet FX, dvs rätt att komplettera för betyg E, ges för skrivning som inte är godkänd, men nått minst 18p totalt.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.

Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL T

Godkänd uppgift 1 på lsIA ht16 ger automatiskt full poäng på uppgift i ($i = 1, 2, 3$) och det ger då ingen ytterligare poäng att lösa den uppgiften på skrivningen.

1a) (1p) Hur definieras att graferna $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ är **isomorfa**?

b) (1p) Vad menas med en **hamiltoncykel** i en graf $G = (V, E)$?

c) (1p) Formulera **Halls sats** om fullständig matchning (av X -hörnen) i en bipartit graf (ä.k. giftermålssatsen).

2a) (1p) Låt $m, n, c \in \mathbb{Z}$. Ange ett (enkla) nödvändigt och tillräckligt villkor för att det skall finnas $x, y \in \mathbb{Z}$ med $mx + ny = c$.

b) (1p) Hur definieras att en funktion $f : X \rightarrow Y$ är en **surjektion**?

c) (1p) Vad säger **postfacksprincipen** (eng. the pigeonhole principle)?

3a) (1p) Hur definieras att en binär relation $\mathcal{R}$ är **transitiv**?

b) (1p) Ange ett **binomialtal** som är lika med $\binom{367}{143} + \binom{368}{143} + \binom{367}{144}$.

c) (1p) Formulera **principen om inklusion och exklusion** (eng. sieve principle) för tre mängder A, B, C .

4a) (1p) Hur definieras **Möbius μ -funktion**? (Dvs vad är $\mu(n)$ för $n \in \mathbb{Z}_+$?)

b) (1p) Låt $\pi, \sigma \in S_n$. Visa att $\pi\sigma$ och $\sigma\pi$ är **konjugerade** permutationer.

c) (1p) Hur ses om $\pi \in S_n$ är jämn eller udda, givet dess cykelstruktur (typ)?

Vänd!

DEL P1

Godkänd uppgift 2 på lsiA ht16 ger automatiskt full poäng på uppgift 4 + i ($i = 1, 2, 3$) och det ger då ingen ytterligare poäng att lösa den uppgiften på skrivningen.

5) (3p) $G = (V, E)$ är en sammanhängande plan graf. Alla hörn i V har valens (eng. degree) 3 eller 5 och alla ytor utom den obegränsade ytan har 4 kanter.

Hur många hörn har valens 5 och hur många ytor med 4 kanter finns det, om 13 av hörnen har valens 3 och den obegränsade ytan har 6 kanter?

6) (3p) Finn alla $x \in \mathbb{Z}_{161}$ (givna som vissa av $0, 1, \dots, 160$) som löser ekvationen

$$112x + 98 = 0 \text{ i } \mathbb{Z}_{161}.$$

7) (3p) På hur många sätt kan 10 (identiska) svarta och 10 (olika) kulörta kulor placeras i två (olika) lådor med 10 kulor i varje låda, så att ingen låda innehåller mindre än 2 svarta kulor?

Svaret får innehålla heltal, faktorer, potenser och de fyra enkla räknesätten.

8) Permutationerna $\pi, \sigma \in S_8$ ges av tabellen:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi(i)$	7	6	1	8	5	2	3	4
$\sigma(i)$	6	8	3	7	2	4	1	5

a) (1p) Ange π , π^{-1} och $\pi\sigma$ på cykelform.

b) (2p) Finn på cykelform en permutation $\tau \in S_8$ sådan att $\pi = \tau\sigma^2\tau^{-1}$, eller visa att ingen sådan existerar.

DEL P2

9) (4p) En ekvivalensrelation $\mathcal{R}$ på $\mathcal{M} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ uppfyller att

$(2, 7) \in \mathcal{R}$, $(2, 8) \notin \mathcal{R}$ och $(x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow (\pi(x), \pi(y)) \in \mathcal{R}$ för alla $x, y \in \mathcal{M}$.

($\pi \in S_8$ är som i uppgift 8. $(x, y) \in \mathcal{R}$ betyder precis att $x\mathcal{R}y$, dvs att x och y står i relationen $\mathcal{R}$.)

Finn sådana $\mathcal{R}$ som delar in $\mathcal{M}$ i dels så många och dels så få ekvivalensklasser som möjligt. Beskriv dina båda $\mathcal{R}$ genom att ange deras ekvivalensklasser.

10) Vid en tentamen med 10 uppgifter kan varje uppgift ge 0, 1 eller 2 poäng.

a) (1p) Hur många olika poängfördelningar är möjliga?

b) (1p) Hur många av dem har minst en uppgift var med 0, 1 och 2 poäng?

c) (2p) Hur många av dem har minst två uppgifter var med 0, 1 och 2 poäng?

Svaren får innehålla heltal, faktorer, potenser och de fyra enkla räknesätten.

11) (4p) Finn alla $k \in \mathbb{Z}$ (positiva och negativa) som uppfyller

$$292^k = 52 \text{ i } \mathbb{Z}_{693}.$$

DEL P3

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

12) (5p) Låt $G = (V, E)$ vara en graf med alla valenser (eng. degrees) minst 2, dvs $\delta(v) \geq 2$ för alla $v \in V$.

Visa att det finns en sammanhängande graf $G' = (V, E')$ med samma hörn och samma valenser som G , dvs $\delta(v) = \delta'(v)$ för alla $v \in V$ (δ, δ' är valenserna i G, G').

13) (5p) Visa att $n \in \mathbb{Z}_+$ uppfyller $\prod_{d|n} d = n^2$ om och endast om n är 1, p^3 (p primtal) eller pq (p, q olika primtal). ($\prod_{d|n} d$ är produkten av alla positiva delare till n .)

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.