Matematik, KTH
B.Ek

Lösningar tenta TENA SF1630(/1631) DISKRET MATEMATIK, D3 m.fl.
25 oktober 2016
Tryckfel kan förekomma.

1a) (1p) Graferna $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ är **isomorfa** omm det finns en bijektion $\phi : V_1 \to V_2$ sådan att för alla $x, y \in V_1$ gäller att $\{x, y\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\phi(x), \phi(y)\} \in E_2$.
b) (1p) En **hamiltoncykel** i en graf $G = (V, E)$ är en cykel (dvs en följd $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1$ med $v_i \in V$, $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ och alla v_i olika) som innehåller alla grafens hörn.
c) (1p) **Halls sats**: en bipartit graf $(X \cup Y, E)$ har en fullständig matchning av X-hörnen omm för varje $A \subseteq X$ gäller $|J(A)| \geq |A|$, där $J(A) = \{y \in Y \mid \{a, y\} \in E$ för något $a \in A\}$.

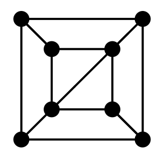
2a) (1p) Att en funktion $f : X \to Y$ är en **bijektion** betyder att för varje $y \in Y$ finns **precis ett** $x \in X$ med $y = f(x)$.
b) (1p) En mängd X kallas **överuppräknelig** omm det varken finns en bijektion $f : \mathbb{N} \to X$ eller $f : \mathbb{N}_n \to X$ för något $n \in \mathbb{N}$.
c) (1p) **Postfacksprincipen** säger att om X, Y är mängder med $|X| > |Y|$ så finns ingen injektion $f : X \to Y$ (dvs för alla $f : X \to Y$ finns $x_1, x_2 \in X$ med $f(x_1) = f(x_2)$).

3a) (1p) Relationen $\mathcal{R}$ på mängden X är **symmetrisk** omm $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ för alla $x, y \in X$.
3b) r identiska objekt kan fördelas på n särskiljbara lådor på $\binom{r+n-1}{r} = \frac{(r+n-1)!}{r! \cdot (n-1)!}$ olika sätt (ordnat val av r st bland n st, upprepning tillåten).
c) Additionsprincipen säger att om A och B är disjunkta (dvs $A \cap B = \varnothing$) ändliga mängder är $|A \cup B| = |A| + |B|$.

4a) (1p) **Eulers ϕ-funktion** ges för $n \in \mathbb{Z}_+$ av $\phi(n) = |\{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq n,\ \text{sgd}(x, n) = 1\}|$.
b) (1p) $\pi \in S_n$ är en **transposition** omm dess cykelstruktur är $[1^{n-2}\,2]$.
c) (1p) $\pi \in S_n$ är jämn/udda omm det totala antalet cykler av jämn längd är jämnt/udda.

---

5) (3p) Vi skall avgöra om det för vidstående graf finns en sluten kurva i planet som korsar varje kant precis en gång och inte går genom något hörn.



Lösning:
En sådan kurva motsvarar precis en eulerkrets i den duala grafen, men den har två hörn med udda valens (motsvarande de triangelformade områdena i mitten), så ingen eulerkrets.
Svar: Nej, någon sådan kurva finns inte.

---

6) (3p) Vi söker alla $x, y \in \mathbb{Z}$ med $1416\,x + 612\,y = 156$.

Lösning:
Euklides algoritm: $1416 = 612 \cdot 2 + 192$, $612 = 192 \cdot 3 + 36$, $192 = 36 \cdot 5 + 12$, $36 = 12 \cdot 3 + 0$, så $\text{sgd}(1416, 612) = 12$ och ekvationen är ekvivalent med (dividera med 12) $118\,x + 51\,y = 13$, med $\text{sgd}(118, 51) = 1$ och $118 = 51 \cdot 2 + 16$, $51 = 16 \cdot 3 + 3$, $16 = 3 \cdot 5 + 1$, så $1 = 16 - 5(51 - 3 \cdot 16) =$ $= -5 \cdot 51 + 16(118 - 2 \cdot 51) = 16 \cdot 118 - 37 \cdot 51$.
Det visar att $x_0 = 16 \cdot 13 = 208$, $y_0 = -37 \cdot 13 = -481$ är en lösning. Om x, y är en lösning fås $118(x - x_0) = -51(y - y_0)$ och (eftersom $\text{sgd}(118, 51) = 1$) $x = x_0 + 51k$, $y = y_0 - 118k$ för något $k \in \mathbb{Z}$. Dessa är också lösningar för alla $k \in \mathbb{Z}$. $k = n - 4$ ger en trevligare form.

Svar: Alla lösningar ges av $\begin{cases} \boldsymbol{x = 4 + 51n} \\ \boldsymbol{y = -9 - 118n,} \end{cases} \quad \boldsymbol{n \in \mathbb{Z}.}$

(Alternativt, Eulers metod: $1416\,x + 612\,y = 156 \Leftrightarrow \boldsymbol{y = -2x + z,}\ 612z + 192x = 156 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{x = -3z + u,}\ 192u + 36z = 156 \Leftrightarrow \boldsymbol{z = 4 - 5u + v,}\ 36v + 12u = 12 \Leftrightarrow \boldsymbol{u = 1 - 3v,}\ v \in \mathbb{Z}$, så
$z = 4 - 5(1 - 3v) + v = -1 + 16v$, $x = -3(-1 + 16v) + (1 - 3v) = 4 - 51v$, $y = -2(4 - 51v) + (-1 + 16v) = -9 + 118v$.)

---

7) (3p) Vi söker antalet sätt att dela ut 10 böcker av 22 till 10 barn av 17.

Lösning:
Varje fördelning bestäms entydigt av vilka 10 böcker som delas ut ($\binom{22}{10}$ olika val, 10-delmängder till en 22-mängd) och vilket barn som får vilken av dem ($\frac{17!}{(17-10)!}$ möjligheter, injektioner 10-mängd $\to$ 17-mängd). Det sökta antalet är alltså (multiplikationsprincipen) $\binom{22}{10} \cdot \frac{17!}{7!} = \frac{17! \cdot 22!}{7! \cdot 10! \cdot 12!}$.

Svar: Fördelningen kan ske på $\frac{17! \cdot 22!}{7! \cdot 10! \cdot 12!}$ (= 45 635 685 045 350 400) sätt.

---

8) $\pi \in S_9$ ges av $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 2 & 1 & 8 & 7 & 5 & 6 & 9 & 3 \end{pmatrix}$. Vi söker på cykelform (a, 1p) π och π^{37} och (b, 2p) ett udda $\sigma \in S_9$ med $\pi\sigma$ en av $\alpha = (1\,6\,3)(2\,8\,7\,5)$ och $\beta = (1\,7)(2\,8\,3\,4)(5\,9\,6)$.

Lösning:
a. $\pi(1) = 4$, $\pi(4) = 8, \ldots$ ger $\pi = (1\,4\,8\,9\,3)(2)(5\,7\,6)$, så $\pi^{37} = (1\,8\,3\,4\,9)(5\,7\,6)$.
($37 = 5 \cdot 7 + 2 = 3 \cdot 12 + 1$, så $(5\text{-cykeln})^{37} = (5\text{-cykeln})^2$ och $(3\text{-cykeln})^{37} = 3\text{-cykeln}$.)
b. π är jämn (ett jämnt antal (0) cykler av jämn längd), så $\pi\sigma$ skall vara udda (jämn $\cdot$ udda). α är udda och β jämn, så $\pi\sigma = \alpha$ och $\sigma = \pi^{-1}\alpha = (3\,9\,8\,4\,1)(6\,7\,5)(1\,6\,3)(2\,8\,7\,5) = (1\,7\,6\,9\,8\,5\,2\,4)(3)$.

Svar a: $\boldsymbol{\pi = (1\,4\,8\,9\,3)(5\,7\,6)}$, $\boldsymbol{\pi^{37} = (1\,8\,3\,4\,9)(5\,7\,6)}$, b: $\boldsymbol{\sigma = (1\,7\,6\,9\,8\,5\,2\,4)}$.

---

9) (4p) Vi söker antalet sätt att fördela elementen i $A = \mathcal{P}(\{a, b, c\}) = \{B \mid B \subseteq \{a, b, c\}\}$ bland 3 personer, utan att någon blir utan.

Lösning:
Det gäller tydligen antalet surjektioner från A till en 3-mängd (personerna), så eftersom $|A| = 2^3 = 8$ ges svaret av $3! \cdot S(8, 3) = 6 \cdot 966 = 5796$ (enligt en känd sats är antalet surjektioner från en n-mängd till en k-mängd $k! \cdot S(n, k)$; stirlingtalet $S(8, 3)$ fås ur ”triangeln” till höger).

1
1 1
1 3 1
1 7 6
1 15 25
1 31 90
63 301
966

Svar: Antalet sådana fördelningar är 5796.

---

10) (4p) Sökt är antalet områden en plan, sammanhängande graf med 9 hörn med valens 4 och alla andra med valens 3 delar in planet i, då lika många kanter förbinder hörn av valens 4 som 3.

Lösning:
Om man delar alla kanter på mitten fås totalt lika många halvkanter på hörn av valens 4 ($9 \cdot 4 = 36$ st) som på hörn av valens 3 (en var från ”blandade” kanter, övriga kanter ger lika många), så antalet hörn av valens 3 är $\frac{36}{3} = 12$. Då är (gängse beteckningar) $v = 9 + 12 = 21$, $e = 18 + 18 = 36$. Eulers polyederformel ger (plan, sammanhängande graf) $v - e + r = 21 - 36 + r = 2$, så $r = 17$.

Svar: $\boldsymbol{G}$ delar in planet i 17 områden.

---

11) (4p) Vi söker alla $k \in \mathbb{N}$ med $4957^k \equiv_{7007} 1$ (och vet att $7007 = 7 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$).

Lösning:
Vi använder kinesiska restsatsen med isomorfin $(\mathbb{Z}_{7007}, +, \cdot) \approx (\mathbb{Z}_{7^2} \times \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{13}, +, \cdot)$ given av bijektionen f med $f(4957) = (8, 7, 4)$ (ty $4957 \equiv_{49} 8$, $\equiv_{11} 7$, $\equiv_{13} 4$).
$f(4957^k) = (8^k, 7^k, 4^k)$, så $4957^k \equiv_{7007} 1 \Leftrightarrow (8^k \equiv_{49} 1,\ 7^k \equiv_{11} 1$ och $4^k \equiv_{13} 1)$.
I $\mathbb{Z}_{49}$: $8^2 = 64 = 15$, $8^3 = 8 \cdot 15 = 120 = 22$, $8^4 = 8 \cdot 22 = 176 = 29$, $8^5 = 8 \cdot 29 = 8 \cdot (-20) = -160 = -13$, $8^6 = 8 \cdot (-13) = -104 = -6$, $8^7 = 8 \cdot (-6) = -48 = 1$, så $\boldsymbol{8^k \equiv_{49} 1 \Leftrightarrow 7 \mid k}$.
I $\mathbb{Z}_{11}$: $7^2 = 49 = 5$, $7^3 = 35 = 2$, $7^4 = 14 = 3$, $7^5 = 21 = 10$, $7^6 = 70 = 4$, $7^7 = 28 = 6$, $7^8 = 42 = 9$, $7^9 = 63 = 8$, $7^{10} = 56 = 1$, så $\boldsymbol{7^k \equiv_{11} 1 \Leftrightarrow 10 \mid k}$.
I $\mathbb{Z}_{13}$: $4^2 = 16 = 3$, $4^3 = 12$, $4^4 = 48 = 9$, $4^5 = 36 = 10$, $4^6 = 40 = 1$, så $\boldsymbol{4^k \equiv_{13} 1 \Leftrightarrow 6 \mid k}$.
Således, $4957^k \equiv_{7007} 1 \Leftrightarrow 7, 10, 6 \mid k \Leftrightarrow \text{mgm}(7, 10, 6) \mid k \Leftrightarrow 210 \mid k$.

Svar: Alla sådana $\boldsymbol{k}$ ges av $\boldsymbol{k = 210n,\ n \in \mathbb{N}}$.

---

12) (5p) Vi söker möjliga cykelstrukturer för $\pi \in S_8$ då $|\{\sigma\pi\sigma^{-1} \mid \sigma \in S_8\}| = 1680$.

Lösning:

Antalet element i π:s konjugatklass är 1680, så cykelstrukturen kan vara $[1^{\alpha_1}\, 2^{\alpha_2} \ldots]$ om och endast om $\frac{8!}{1^{\alpha_1}\cdot 2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\alpha_1!\cdot\alpha_2!\cdot\ldots} = 1680 = 2^4\cdot 3\cdot 5\cdot 7$ (känd sats).
Det ger att $1^{\alpha_1}\cdot 2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\alpha_1!\cdot\alpha_2!\cdot\ldots = \frac{8!}{1680} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2^4\cdot3\cdot5\cdot7} = 2^3\cdot 3 = 24$.
Tydligen kan inget $\alpha_k > 4$ (det skulle ge en faktor 5 i VL), $\alpha_k = 4$ ($4! = 24$, men inte bara 1-cykler) eller $\alpha_k = 3$ ($3! = 6$, måste vara $\alpha_1 = 3$, men $2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\alpha_2!\cdot\ldots \mid 4$ går inte med $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots = 8$). Det ger att π måste ha precis en 3-cykel (varken $[1^2\, 6]$ eller $[2\, 6]$ och ingen annan faktor 3 i VL) och därmed för övrigt bara 1-, 2- eller 4-cykler. Prövning med $[1\,3\,4]$, $[1\,2^2\,3]$ ger att bara den senare ger rätt VL.

Svar: π:s cykelstruktur måste vara $[1\,2^2\,3]$.

---

13) Vi skall visa att (a, 1p) ett träd $T = (V, E)$ med $|V| \geq 2$ är bipartit och (b, 4p) om trädet $T = (X \cup Y, E)$ (vanliga X, Y) har $|X| = |Y| \geq 1$ så ligger inte alla dess löv i en av X, Y.

Lösning:

a. Enligt en känd sats är en graf bipartit omm den inte innehåller någon udda cykel. Det gäller för varje träd (som ju inte innehåller någon cykel alls). □

b. Det räcker tydligen att visa påståendet att om trädet $T = (X \cup Y, E)$ (bipartit) har minst ett löv (så $|V| \geq 2$) och löven alla ligger i X, så måste $|X| > |Y|$.

Alt 1. Induktion över $|V|$ ($V = X \cup Y$). Antag att påståendet är sant för alla träd med $1 < |V| < n \in \mathbb{N}$. Om alla T:s löv är i X, betrakta ett hörn $v \in Y$ (finns, ty $|V| > 1 \Rightarrow |E| > 0$). Om v och alla dess kanter tas bort, kommer varje uppkommen komponent att antingen vara ett löst X-hörn eller ha alla sina löv i X (T-grannar till v eller löv i T). Komponenterna har då alla strikt fler X-hörn än Y-hörn ($1 > 0$ resp. enligt induktionsantagandet). Det ger $|X| > |Y|$ (ty antalet komponenter var minst två) och induktionen är klar. □

Alt 2. Vi utgår åter från ett hörn $v \in Y$ (finns som ovan) och låter, för $k \in \mathbb{N}$,
$Y_{2k} = \{u \in V \mid \text{avståndet } v \to u \text{ är } 2k\}$, $X_{2k+1} = \{u \in V \mid \text{avståndet } v \to u \text{ är } 2k+1\}$
(avståndet $v \to u$ är antalet kanter i den unika stigen från v till u).
Då är $Y_0 = \{v\}$, $X_1 = \{v\text{:s grannar}\}$ och $X = X_1 \cup X_3 \cup \ldots$, så $|X| = \sum_{k\in\mathbb{N}} |X_{2k+1}|$ och $Y = Y_0 \cup Y_2 \cup \ldots$, så $|Y| = \sum_{k\in\mathbb{N}} |Y_{2k}|$ (alla X_i, Y_j är disjunkta).
$|X_1| > |Y_0|$ (v har minst två grannar) och $|X_{2k+1}| \geq |Y_{2k}|$ ($f : X_{2k+1} \to Y_{2k}$ med $y = f(x)$ omm den unika stigen $v \to x$ går genom y är en surjektion (ty inget hörn i Y har valens 1)) ger påståendet. □

Bättre lösning (efter en inlämnad skrivning): Om $T = (X \cup Y, E)$ som ovan och X (säg) inte innehåller några löv, är $\delta(x) \geq 2$ för alla $x \in X$ (inga isolerade hörn då $|V| \geq 2$).
I en bipartit graf är $|E| = \sum_{x\in X} \delta(x)$, så eftersom $|V| = |E| + 1$ i ett träd blir här $|X| + |Y| = |V| = |E| + 1 \geq 2|X| + 1$, så $|Y| \geq |X| + 1$. Påståendet följer. □
