

Lösningar tenta TENA SF1630(/1631) DISKRET MATEMATIK, D3 m.fl.
21 december 2017

Tryckfel kan förekomma.

- 1a) (1p) Graferna $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ är **isomorfa** omm det finns en bijektion $\phi: V_1 \rightarrow V_2$ sådan att för alla $x, y \in V_1$ gäller att $\{x, y\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\phi(x), \phi(y)\} \in E_2$.
b) (1p) Grafen $T = (V, E)$ är ett träd omm den är sammanhängande och saknar cykler.
c) (1p) Det kromatiska talet, $\chi(G)$, för en graf $G = (V, E)$ är det minsta antalet färger som gör det möjligt att färga grafens hörn så att inga grannar får samma färg.

- 2a) (1p) Om $y, m \in \mathbb{Z}$ och $\text{sgd}(y, m) = 1$ så är $y^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ (där ϕ är Eulers ϕ -funktion).
b) (1p) $f: X \rightarrow Y$ är en injektion omm för varje $y \in Y$ finns högst ett $x \in X$ med $y = f(x)$.
c) (1p) En mängd X är överuppräknelig omm det inte finns någon bijektion $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ eller $f: \mathbb{N}_n \rightarrow X$, där $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ för $n \in \mathbb{N}$.

- 3a) (1p) En binär relation $\mathcal{R}$ på mängden X är symmetrisk omm $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$, alla $x, y \in X$.
b) Stirlingtalet (av andra slaget) $S(n, k)$ anger antalet olika partitioner av en n -mängd i precis k (icke-tomma) delar.

c) **Principen om inklusion och exklusion** för tre mängder A, B, C säger att $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$.

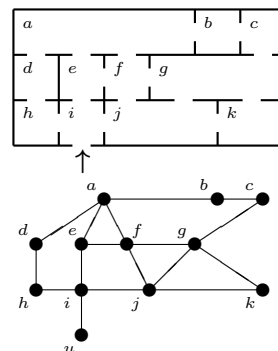
- 4a) (1p) Eulers ϕ -funktion ges för $n \in \mathbb{Z}_+$ av $\phi(n) = |\{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq n, \text{sgd}(x, n) = 1\}|$.
(Korrekta) svar som anger hur $\phi(n)$ beräknas utgående från n :s primtalsfaktorisering godtas också.)
b) (1p) En permutation av en mängd X är en bijektion $\pi: X \rightarrow X$.
c) (1p) $\pi \in S_n$ är **udda** omm $n - c(\pi)$ är udda, där $c(\pi)$ är totala antalet cykler i π .

- 5) (3p) Vi skall avgöra om det är möjligt att passera varje dörr exakt en gång om man går in i huset vid pilen och i vilket rum man i så fall kan befinna sig när man är klar.

Lösning:

Vi bildar grafen med ett hörn för varje rum (och ett för utsidan) och kanter mellan rum som har dörr mellan sig. Den har precis två hörn med udda valens, u och e . Det går alltså (Euler) att passera varje dörr (kant) precis en gång. Man måste sluta i det andra udda hörnet, e .

Svar: Det är möjligt. Man slutar i rum e .



- 6) (3p) Vi söker alla $x \in \mathbb{Z}$ med $x^{103} + 49x + 33 \equiv 7 \pmod{103}$.

Lösning:

Eftersom 103 är ett primtal är $x^{103} \equiv x \pmod{103}$ för alla $x \in \mathbb{Z}$ (från Fermats lilla sats), så ekvationen blir $50x \equiv_{103} -26$.

Vi finner 50^{-1} i $\mathbb{Z}_{103}$: $103 = 50 \cdot 2 + 3$, $50 = 3 \cdot 16 + 2$, $3 = 2 \cdot 1 + 1$,

så $1 = 3 - (50 - 16 \cdot 3) = -50 + 17(103 - 2 \cdot 50) = 17 \cdot 103 - 35 \cdot 50$.

Vi multiplicerar ekvationen med -35 (relativt primt med 103) och får den ekvivalenta

$$x \equiv_{103} (-35)50x \equiv_{103} (-35)(-26) = 910 \equiv_{103} 86.$$

Svar: Alla lösningar ges av $x = 86 + 103k$, där $k \in \mathbb{Z}$.

7) Vi söker (a, 2p) antalet sätt att fördela 12 olika julklappar och 15 identiska ljus bland 30 personer, då varje person kan få högst en klapp, och (b, 1p) antalet sätt då dessutom minst en person får både en julklapp och minst ett ljus.

Lösning:

a. Klapparna kan fördelas på $(30)_{12} = \frac{30!}{(30-12)!} = \frac{30!}{18!}$ sätt (antalet injektioner klappar $\rightarrow$ personer).

Ljusen kan fördelas på $\binom{30+15-1}{15} = \frac{44!}{15! \cdot 29!}$ sätt (15 ljus utses bland 44 ljusväggar).

Multiplikationsprincipen ger svaret $\frac{30!}{18!} \cdot \frac{44!}{15! \cdot 29!} = \frac{30 \cdot 44!}{15! \cdot 18!}$.

b. Från svaret i a. dras antalet fördelningar då alla som fått en klapp blir utan ljus. De är som ovan $\frac{30!}{18!} \cdot \binom{18+15-1}{15} = \frac{30! \cdot 32!}{15! \cdot 17! \cdot 18!}$ (ljusen fördelas bland de 18 som inte fått någon julklapp).

Det sökta antalet blir alltså $\frac{30!}{18!} \left(\frac{44!}{15! \cdot 29!} - \frac{32!}{15! \cdot 17!} \right) = \frac{30!}{15! \cdot 18!} \left(\frac{44!}{29!} - \frac{32!}{17!} \right)$.

Svar a: På $\frac{30 \cdot 44!}{15! \cdot 18!}$ (= 9 525 328 687 637 874 063 912 960 000) sätt,

b: På $\frac{30!}{15! \cdot 18!} \left(\frac{44!}{29!} - \frac{32!}{17!} \right)$ (= 9 501 890 572 926 376 062 197 760 000) sätt

8) $\pi, \sigma \in S_8$ ges av tabellen. Vi söker (a, 1p) π på

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi(i)$	7	5	6	1	2	8	4	3

 cykelform och dess ordning och (b, 2p) $\tau \in S_8$ med $\pi\tau = \tau\pi^{-1}$, eller skall visa att inget sådant τ existerar.

Lösning:

a. $\pi(1) = 7, \pi(7) = 4, \dots$ ger $\pi = (1\ 7\ 4)(2\ 5)(3\ 6\ 8)$ så $o(\pi) = \text{mgm}(3, 2, 3) = 6$.

b. $\pi\tau = \tau\pi^{-1} \Leftrightarrow \pi = \tau\pi^{-1}\tau^{-1}$. π och $\pi^{-1} = (1\ 4\ 7)(2\ 5)(3\ 8\ 6)$ har samma cykelstruktur (sant för alla permutationer π), så de är konjugerade och sådana τ existerar (för alla π).

$\tau\pi^{-1}\tau^{-1} = (\tau(1)\tau(4)\tau(7))(\tau(2)\tau(5))(\tau(3)\tau(8)\tau(6))$,

i	1	4	7	2	5	3	8	6
$\tau(i)$	1	7	4	2	5	3	6	8

 så vi kan (t.ex.) välja τ enligt tabellen, $\tau = (4\ 7)(6\ 8)$.

Svar a: $\pi = (1\ 7\ 4)(2\ 5)(3\ 6\ 8)$ och $o(\pi) = 6$,

b: Ett sådant $\tau = (4\ 7)(6\ 8)$ (det finns 36 möjligheter).

9) (4p) Vi söker (den minsta icke-negativa) resten då $21^{12^{2017}}$ divideras med 23.

Lösning:

$12^{2017} \equiv_2 0$ (ty $2 \mid 12$) och $12^{2017} \equiv_{11} 1$, så $2, 11 \mid (12^{2017} - 12)$ och därmed $12^{2017} \equiv_{22} 12$.

Således $21^{12^{2017}} = 21^{22k+12} = (21^{22})^k \cdot 21^{12} \equiv_{23} 1 \cdot 21^{12}$ för ett $k \in \mathbb{N}$ (Fermats lilla sats, 23 är primtal och $23 \nmid 21$). $21^{12} \equiv_{23} (-2)^{12} = 64^2 \equiv_{23} (-5)^2 \equiv_{23} 25 \equiv_{23} 2$.

Svar: Den minsta icke-negativa resten då $21^{12^{2017}}$ divideras med 23 är 2.

10) (4p) $|A| = a, |B| = b, |X| = n$, där $A \cap B = \emptyset$ och $a + b \geq n, n \geq a, n \geq b$.

Vi söker antalet surjektioner $f: A \cup B \rightarrow X$ vars restriktioner till A och B är injektioner.

Lösning:

f :s värden på A kan väljas på $\frac{n!}{(n-a)!}$ sätt (injektion a -mängd $\rightarrow n$ -mängd).

För att f skall vara en surjektion måste X :s övriga $n - a$ värden antas av $n - a$ av B :s element. Det kan ske på $\frac{b!}{(b-(n-a))!} = \frac{b!}{(a+b-n)!}$ sätt (injektion $(n-a)$ -mängd $\rightarrow b$ -mängd).

Värdena i B :s övriga $a + b - n$ element kan väljas fritt, men olika, bland de X -värden f antar på A . Det kan ske på $\frac{a!}{(a-(a+b-n))!} = \frac{a!}{(n-b)!}$ sätt (injektion $b - (n - a)$ -mängd $\rightarrow a$ -mängd).

Multiplikationsprincipen ger det totala antalet som produkten av de ovanstående.

Svar: Det sökta antalet är $\frac{n! \cdot a! \cdot b!}{(a+b-n)! \cdot (n-a)! \cdot (n-b)!}$.

(Notera att svaret som sig bör är symmetriskt i a och b . Kontrollera också med fallen $n = a + b$ och $n = a$.)

11) (4p) $G = (V, E)$, $G_i = (V_i, E_i)$, $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ och $E_i = \{\{x, y\} \in E \mid x, y \in V_i\}$. Vi skall visa att för de kromatiska polynomen gäller $P_G(\lambda) \leq P_{G_1}(\lambda) \cdot P_{G_2}(\lambda)$ då $\lambda \in \mathbb{N}$.

Lösning:

Låt $G' = (V, E_1 \cup E_2)$ (dvs G med alla kanter mellan hörn i både V_1 och V_2 borttagna, så G' består av delarna G_1 och G_2 , utan kanter mellan). Då är färgningar av delarna G_1 och G_2 oberoende, så $P_{G'}(\lambda) = P_{G_1}(\lambda) \cdot P_{G_2}(\lambda)$ då $\lambda \in \mathbb{N}$ (för varje färgning av G_1 finns $P_{G_2}(\lambda)$ färgningar av G_2). Men färgningarna av G utgör en delmängd av dem av G' , så $P_G(\lambda) \leq P_{G'}(\lambda)$ och **saken är klar**.

12) (5p) Vi skall visa att $3r_3 + 2r_4 + r_5 - r_7 - 2r_8 - \dots = \sum_{i=3}^{\infty} (6-i)r_i = 12$ för en plan, sammanhängande, 3-reguljär graf med r_i st ytor med i kanter ($i = 3, 4, \dots$).

Lösning:

Om vi adderar alla hörnens valenser räknar vi varje kant två gånger, så $3v = 2e$. Om vi adderar antalet kanter vid varje yta räknar vi p.s.s. varje kant två gånger, så $\sum_i ir_i = 2e$. Totala antalet ytor är $r = \sum_i r_i$.

En plan, sammanhängande graf har (Eulers polyederformel) $v - e + r = 2$, så $3v - 3e + 3r = 6$. Med $3v = 2e$ ger det $-e + 3r = 6$, så $6r - 2e = 12$. Insättning av r och e ger $6\sum_i r_i - \sum_i ir_i = \sum_i (6-i)r_i = 12$.
Saken är klar.

13) (5p) $f, g: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ uppfyller $f(n) = \prod_{d|n} g(d)$, för $n \in \mathbb{Z}_+$.

Vi skall uttrycka $g(n)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) med f :s värden.

Lösning:

Vi tar logaritmen av det givna och använder Möbius inversionsformel: $f(n) = \prod_{d|n} g(d) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \log f(n) = \sum_{d|n} \log g(d) \Leftrightarrow \log g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \log f(\frac{n}{d}) = \log \prod_{d|n} f(\frac{n}{d})^{\mu(d)} \Leftrightarrow \Leftrightarrow g(n) = \prod_{d|n} f(\frac{n}{d})^{\mu(d)}$, μ Möbius funktion.

Svar: $g(n) = \prod_{d|n} f(\frac{n}{d})^{\mu(d)}$, där μ är Möbius funktion.
