

Matematik, KTH

B.Ek

Tentamen TENA i kurs
SF1630(/SF1631), DISKRET MATEMATIK för D
torsdagen den 21 december 2017, klockan 8.00–13.00.

Examinator: Bengt Ek, tel 790 6951.

Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Maximal poäng på de olika delarna är T: 12p, P1: 12p, P2: 12p, P3: 10p.

För **godkänt** krävs minst 9p på var och en av delarna T och P1.

För betyg A–E krävs **dels** godkänt och **dels** poäng enligt:

För betyg	A	B	C	D	E	
krävs totalt	37	32	-	25	-	poäng
varav	-	12	8	-	-	på delarna P2 och P3 tillsammans
och	5	-	-	-	-	på del P3

Omdömet FX, dvs rätt att komplettera för betyg E, ges för skrivning som inte är godkänd, men nått minst 18p totalt.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.

Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL T

Godkänd uppgift 1 på lsiA ht16 ger automatiskt full poäng på uppgift i ($i = 1, 2, 3$) och det ger då ingen ytterligare poäng att lösa den uppgiften på skrivningen.

1a) (1p) Hur definieras att graferna $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ är **isomorfa**?

b) (1p) Hur definieras att en graf $T = (V, E)$ är ett **träd**?

c) (1p) Vad menas med det **kromatiska talet**, $\chi(G)$, för grafen $G = (V, E)$?

2a) (1p) Formulera den **Eulers sats** som handlar om vissa potenser av heltal.

b) (1p) Hur definieras att en funktion $f: X \rightarrow Y$ är en **injektion**?

c) (1p) Hur definieras att en mängd X är **överuppräknelig** (eng. uncountable)?

3a) (1p) Hur definieras att en binär relation $\mathcal{R}$ är **symmetrisk**?

b) (1p) Vad anger **stirlingtalet** (av andra slaget) $S(n, k)$ (då $n, k \in \mathbb{Z}_+$, $k \leq n$)?

c) (1p) Formulera **principen om inklusion och exklusion** (eng. sieve principle) för tre mängder A , B , C .

4a) (1p) Hur definieras **Eulers ϕ -funktion**? (Dvs vad är $\phi(n)$ för $n \in \mathbb{Z}_+$?)

b) (1p) Vad är en **permutation** av en mängd X (t.ex. $\{1, 2, \dots, n\}$)?

c) (1p) Hur kan man avgöra om permutationen $\pi \in S_n$ är **udda** eller **jämn** om man känner antalet cykler i π , $c(\pi)$?

DEL P1

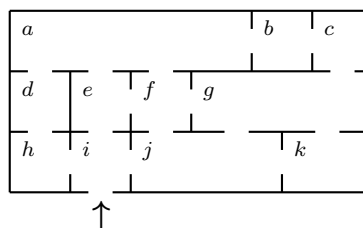
Godkänd uppgift 2 på lsiA ht16 ger automatiskt full poäng på uppgift $4 + i$ ($i = 1, 2, 3$) och det ger då ingen ytterligare poäng att lösa den uppgiften på skrivningen.

Vänd!

5) (3p) Härintill syns planen för ett hus, med rum och med dörrar mellan rummen.

Avgör om det är möjligt att gå in (vid pilen) och sedan passera varje dörr exakt en gång.

Om det är möjligt, i vilket eller vilka av rummen ($a-k$) kan man befinna sig när man är klar?



6) (3p) Finn alla $x \in \mathbb{Z}$ med

$$x^{103} + 49x + 33 \equiv 7 \pmod{103}.$$

7a) (2p) På hur många sätt kan 12 olika julklappar och 15 identiska stearinljus fördelas bland 30 (olika) personer, om varje person kan få högst en julklapp, men ett godtyckligt antal av ljusen?

b) (1p) I hur många av fördelningarna i a) får minst en person både en julklapp och minst ett ljus?

Svaren får innehålla heltal, faktorer, potenser och de fyra enkla räknesätten.

8) Permutationen $\pi \in S_8$ ges av tabellen:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi(i)$	7	5	6	1	2	8	4	3

a) (1p) Ange π på cykelform och π 's ordning.

b) (2p) Finn på cykelform en permutation $\tau \in S_8$, sådan att $\pi\tau = \tau\pi^{-1}$, eller visa att ingen sådan existerar.

DEL P2

9) (4p) Vad blir (den minsta icke-negativa) resten då $21^{12^{2017}}$ (dvs $21^{(12^{2017})}$) divideras med 23?

10) (4p) Låt A , B , X vara mängder med $A \cap B = \emptyset$, $|A| = a$, $|B| = b$, $|X| = n$, där $a + b \geq n$, $n \geq a$ och $n \geq b$.

Hur många surjektioner $f: A \cup B \rightarrow X$, där f 's restriktioner till A och B är injektioner (dvs $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ och motsvarande för B) finns det?

(Svaret får innehålla a , b , n , potenser, faktorer och de fyra enkla räknesätten.)

11) (4p) Låt G , G_1 , G_2 vara grafer, där $G = (V, E)$, $G_i = (V_i, E_i)$, $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ och $E_i = \{\{x, y\} \in E \mid x, y \in V_i\}$ ($i = 1, 2$).

Om $P_G(\lambda)$, $P_{G_i}(\lambda)$ är G 's och G_i 's kromatiska polynom (dvs, för $\lambda \in \mathbb{N}$, antalet hörnfärgningar av G , G_i med högst λ färger), visa att för $\lambda \in \mathbb{N}$ gäller

$$P_G(\lambda) \leq P_{G_1}(\lambda) \cdot P_{G_2}(\lambda).$$

DEL P3

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

12) (5p) Låt $G = (V, E)$ vara en plan, sammanhängande, 3-reguljär (enkel, dvs utan öglor och multipla kanter) graf med r_i st ytor med i kanter ($i = 3, 4, \dots$).

Visa att

$$3r_3 + 2r_4 + r_5 - r_7 - 2r_8 - \dots = \sum_{i=3}^{\infty} (6 - i)r_i = 12$$

13) (5p) Låt $f, g: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ uppfylla $f(n) = \prod_{d|n} g(d)$, för $n \in \mathbb{Z}_+$.

($\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ och $\prod_{d|n}$ betecknar produkten över alla **positiva** delare till n .)

Finn ett (enkelt) uttryck för att beräkna $g(n)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) med hjälp av f 's värden.

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.