

- 1a)** (1p) Graferna $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ är isomorfa omm det finns en bijektion $\phi: V_1 \rightarrow V_2$ sådan att $\{x, y\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\phi(x), \phi(y)\} \in E_2$ för alla $x, y \in V_1$
- b)** (1p) En graf $G = (V, E)$ är **bipartit** precis om $V = X \cup Y$, $X \cap Y = \emptyset$ och alla kanter består av ett X -hörn och ett Y -hörn.
- c)** (1p) Det **kromatiska talet**, $\chi(G)$, för en graf $G = (V, E)$ är det minsta antalet färger som gör det möjligt att färga hörnen så att inga grannar har samma färg.

- 2a)** (1p) Att en funktion $f: X \rightarrow Y$ är en **injektion** betyder att det för varje $y \in Y$ finns **högst ett** $x \in X$ med $y = f(x)$ (alt. att $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ för alla $x_1, x_2 \in X$).
- b)** (1p) **Postfacksprincipen** säger att om $|X| > |Y|$ finns ingen injektion $f: X \rightarrow Y$.
(Flera alternativ möjliga, t.ex. "Om $n > m$ brev ligger i m postfack finns minst ett fack med minst två brev".)
- c)** (1p) $\mathbb{R}$, mängden av reella tal, är oändlig men inte uppräknelig (Biggs 9.7).

- 3a)** (1p) En binär relation $\mathcal{R}$ på mängden X är **reflexiv** omm $x\mathcal{R}x$ för alla $x \in X$.
- b)** (1p) Om A, B, C är ändliga mängder säger **principen om inklusion och exklusion** att $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$.
- c)** (1p) $\binom{77}{44} + \binom{78}{44} + \binom{77}{45} = \binom{78}{44} + (\binom{77}{44} + \binom{77}{45}) = \binom{78}{44} + \binom{78}{45} = \binom{79}{45}$.

- 4a)** (1p) **Möbius μ -funktion** ges av $\mu(n) = \begin{cases} (-1)^r, & \text{om } n \text{ är en produkt av } r \text{ olika primtal,} \\ 0, & \text{om } p^2 \mid n \text{ för något primtal } p. \end{cases}$
(1 är produkten av 0 primtal, så $\mu(1) = 1$.)
- b)** (1p) $\pi \in S_n$ har samma paritet som $n - c(\pi)$ (dvs är udda/jämn omm $n - c(\pi)$ är det).
- c)** (1p) Permutationerna $\alpha, \beta \in S_n$ är **konjugerade** omm det finns $\sigma \in S_n$ med $\beta = \sigma\alpha\sigma^{-1}$.

5) (3p) Vi söker möjliga antal områden en sfär delas in i, då grafen $G = (V, E)$ bestående av fem träd med $|V| = v$ hörn som är ritad på sfären ges 67 kanter till (utan kantkorsningar).

Lösning:

Med gängse beteckningar är för den nya grafen $e = (v - 5) + 67 = v + 62$ (varje träd har en kant mindre än hörn). Eftersom vi har en plan graf med minst en och högst fem komponenter (beroende på om de nya kanterna förbinder hörn i G 's olika komponenter eller inte), är $v - e + r = 2, 3, \dots, 6$ ($1 + c$, antalet komponenter), så antalet områden $r = 1 + c + e - v = 63 + c$.

Svar: De sökta möjliga antalen områden är 64, 65, 66, 67 och 68.

(Alt. varje ny kant inom en komponent ökar antalet områden med ett (den skapar en ny cykel).)

6) (3p) Vi söker alla $x \in \mathbb{Z}_{522}$ som uppfyller $51x = 93$.

Lösning:

De sökta x är de $x \in \{0, 1, \dots, 521\}$ som uppfyller $522 \mid (51x - 93)$, dvs $51x - 522k = 93$ för något $k \in \mathbb{Z}$.

Euklides algoritm: $522 = 51 \cdot 10 + 12$, $51 = 12 \cdot 4 + 3$, $12 = 3 \cdot 4 + 0$, så $\text{sgd}(522, 51) = 3$ och ekvationen är ekvivalent med (dividera med 3) $17x - 174k = 31$, med $\text{sgd}(17, 174) = 1$ och $174 = 17 \cdot 10 + 4$, $17 = 4 \cdot 4 + 1$, så $1 = 17 - 4(174 - 10 \cdot 17) = 17 \cdot 41 - 174 \cdot 4$.

Det visar att $x_0 = 31 \cdot 41 = 1271$, $k_0 = 31 \cdot 4 = 124$ är en lösning. Om x, k är en lösning fås $17(x - x_0) = 174(k - k_0)$ och (eftersom $\text{sgd}(17, 174) = 1$) $x = x_0 + 174m$, $k = k_0 + 17m$ för något $m \in \mathbb{Z}$. Dessa är också lösningar för alla $m \in \mathbb{Z}$.

$m = -7, -6, -5$ ger $x = 53, 227, 401$ (de enda i $\{0, 1, \dots, 521\}$).

Svar: Alla lösningar är $x = 53, 227, 401$.

(Alternativt, Eulers metod: $51x - 522k = 93 \Leftrightarrow x = 10k + 1 + y$, $51y - 12k = 42 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = 4z - 3 + z$, $3y - 12z = 6 \Leftrightarrow y = 2 + 4z$, $z \in \mathbb{Z}$, så

$k = 4(2 + 4z) - 3 + z = 5 + 17z$, $x = 10(5 + 17z) + 1 + (2 + 4z) = 53 + 174z$, etc.)

12) (5p) K_{17} :s kanter har färgats med tre färger. Vi visar att det finns en enfärgad triangel.

Lösning:

Som i exemplet i Biggs 10.1, men "ett steg till".

Välj ett hörn, v_0 säg. Bland dess 16 kanter måste minst 6 ha samma färg, f_0 säg ("generaliserade postfacksprincipen", Biggs 10.1). Låt V' vara mängden av v_0 :s " f_0 -grannar". Om någon kant inom V' har färg f_0 ger den med två kanter till v_0 en enfärgad triangel. Annars, tag ett hörn v_1 i V' , det har minst 5 grannar i V' och alla kanter till dessa har en av två färger. Det finns alltså minst tre kanter (inom V') från v_1 med samma färg, f_1 säg. Låt V'' vara mängden av v_1 :s " f_1 -grannar" i V' . Om någon kant inom V'' har färg f_1 ger den med två kanter till v_1 en enfärgad triangel, annars har alla kanter inom V'' samma färg, men $|V''| \geq 3$, så i alla fallen finns en enfärgad triangel. **Saken är klar.**

13) (5p) Vi skall visa att om en graf $G = (V, E)$ har medelvalens $d(= \frac{1}{|V|} \sum_{x \in V} \delta(x))$, så har G en delgraf $G' = (V', E')$ där alla valenser är $\geq \frac{d}{2}$.

Lösning:

Induktion över $|V|$.

Bas: Om $|V| = 1$ är påståendet trivialt sant ($d = 0$, $G' = G$).

Steg: Antag att påståendet är sant för alla grafer med $k \in \mathbb{Z}_+$ hörn och låt $|V| = k + 1$.

Om $\delta(v) \geq \frac{d}{2}$ för alla $v \in V$, tag $G' = G$.

Annars, tag ett $v \in V$ med $\delta(v) < \frac{d}{2}$ och låt $G_1 = (V_1, E_1)$ vara G med v och alla dess kanter borttagna (så $|V_1| = |V| - 1 = k$, $|E_1| = |E| - \delta(v) > |E| - \frac{d}{2}$).

Då är medelvalensen i G_1 : $d_1 = \frac{1}{|V_1|} \sum_{x \in V_1} \delta_1(x) = \frac{2|E_1|}{|V_1|} > \frac{2(|E| - \frac{d}{2})}{|V|-1} = \frac{2|E| - \frac{2|E|}{|V|}}{|V|-1} = \frac{2|E|}{|V|} = d$, så enligt induktionsantagandet finns en delgraf till G_1 (så också till G), med alla valenser $\geq \frac{d_1}{2} > \frac{d}{2}$. Steget är därmed klart.

Enligt induktionsprincipen gäller påståendet för alla ändliga grafer.

Saken är klar.