

Matematik, KTH

B.Ek

Tentamen TENA i kurs
SF1630(/SF1631), DISKRET MATEMATIK för D m.fl.
onsdagen den 21 december 2016, klockan 8.00–13.00.

Examinator: Bengt Ek, tel 790 6951.

Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Maximal poäng på de olika delarna är T: 12p, P1: 12p, P2: 12p, P3: 10p.

För **godkänt** krävs minst 9p på var och en av delarna T och P1.

För betyg A–E krävs **dels** godkänt och **dels** poäng enligt:

För betyg	A	B	C	D	E	
krävs totalt	37	32	-	25	-	poäng
varav	-	12	8	-	-	på delarna P2 och P3 tillsammans
och	5	-	-	-	-	på del P3

Omdömet FX, dvs rätt att komplettera för betyg E, ges för skrivning som inte är godkänd, men nått minst 18p totalt.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.

Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL T

Godkänd uppgift 1 på lsA ht16 ger automatiskt full poäng på uppgift i ($i = 1, 2, 3$) och det ger då ingen ytterligare poäng att lösa den uppgiften på skrivningen.

1a) (1p) Hur definieras att graferna $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ är **isomorfa**?

b) (1p) Vad menas med att en graf $G = (V, E)$ är **bipartit**?

c) (1p) Vad menas med det **kromatiska talet**, $\chi(G)$, för en graf $G = (V, E)$?

2a) (1p) Hur definieras att en funktion $f : X \rightarrow Y$ är en **injektion**?

b) (1p) Formulera **postfacksprincipen** (eng. pigeonhole principle).

c) (1p) Ge ett exempel på en oändlig mängd som inte är uppräknelig.

3a) (1p) Hur definieras att en binär relation $\mathcal{R}$ på mängden X är **reflexiv**?

b) (1p) Formulera **principen om inklusion och exklusion** (eng. sieve principle) för tre mängder A , B , C .

c) (1p) Ange vilket binomialtal som är $\binom{77}{44} + \binom{78}{44} + \binom{77}{45}$.

4a) (1p) Hur definieras **Möbius μ -funktion**? (Dvs vad är $\mu(n)$ för $n \in \mathbb{Z}_+$?)

b) (1p) Hur kan man avgöra om permutationen $\pi \in S_n$ är **udda** eller **jämn** om man bara känner (n och) det totala antalet cykler i π , $c(\pi)$?

c) (1p) Hur definieras att permutationerna $\alpha, \beta \in S_n$ är **konjugerade**?

Vänd!

DEL P1

Godkänd uppgift 2 på lsiA ht16 ger automatiskt full poäng på uppgift 4 + i ($i = 1, 2, 3$) och det ger då ingen ytterligare poäng att lösa den uppgiften på skrivningen.

5) (3p) En graf $G = (V, E)$ består av fem komponenter, var och en av dem ett träd, och är ritad utan korsande kanter på ytan av en sfär. Utan att korsa några kanter drar man 67 nya kanter mellan G 's hörn (eng. vertices). Finn alla möjliga värden för antalet områden den nya grafen delar in sfärens yta i.

6) (3p) Finn alla $x \in \mathbb{Z}_{522}$ som uppfyller $51x = 93$ (i $\mathbb{Z}_{522}$, förstås).
(Varje sådant x skall anges som ett av $0, 1, \dots, 521$.)

7) (3p) Låt $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ och $Y = \{a, b, c, d\}$.
För hur många funktioner $f : X \rightarrow Y$ finns minst ett element i Y som inte antas, dvs det finns minst ett $y \in Y$ sådant att $y \neq f(x)$ för alla $x \in X$?
Svaret får innehålla heltal, faktorer, potenser och de fyra enkla räknesätten.

8) Permutationen $\pi \in S_8$ ges av tabellen:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi(i)$	7	4	8	3	6	5	1	2

a) (1p) Är π jämn eller udda?

b) (2p) Finn $\sigma, \tau \in S_8$, sådana att $\sigma\tau = id$ (identitetspermutationen) och $\sigma\pi\tau$ tar vart och ett av $1, 3, 5, 7$ till något av $2, 4, 6, 8$.

DEL P2

9) (4p) Vilka är de två sista siffrorna (i bas 10) i talet 1369^{422} ?

10) (4p) Givet 11 oändliga decimalbråk. Visa att det för minst två av dem finns ett oändligt antal positioner där båda talen har samma decimal.

11) (4p) Givet en mängd X med delmängder A, B och C sådana att $|X| = 40$, $|A| = |B| = |C| = 18$, $|A \cap B| = 11$, $|B \cap C| = 7$, $|C \cap A| = 6$, $|A \cap B \cap C| = 4$, hur många funktioner $f : X \rightarrow X$ har egenskapen att för alla $x \in X$ innehåller var och en av A, B och C precis en av x och $f(x)$?
(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktorer och de fyra vanliga räknesätten.)

DEL P3

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

12) (5p) Varje kant i K_{17} , den fullständiga (eng. complete) grafen med 17 hörn, ges en av tre färger. Visa att det finns en enfärgad triangel, dvs tre hörn vars tre inbördes kanter alla har samma färg.

13) (5p) Visa att om en graf $G = (V, E)$ har medelvalens $d(= \frac{1}{|V|} \sum_{x \in V} \delta(x))$ (där $\delta(x)$ är valensen (eng. degree) för hörnet $x \in V$), så har G en (icke-tom, förstås) delgraf $G' = (V', E')$ ($\emptyset \neq V' \subseteq V, E' \subseteq E$) där alla valenser är $\geq \frac{d}{2}$ (dvs $\delta'(x) \geq \frac{d}{2}$, där $\delta'(x)$ är valensen i G' , för alla $x \in V'$).

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.