

Matematik, KTH

B.Ek

Tentamen TENA i kurs
SF1630(/SF1631), DISKRET MATEMATIK för D
tisdagen den 27 oktober 2015, klockan 8.00–13.00.

Examinator: Bengt Ek, tel 790 6951.

Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Maximal poäng på de olika delarna är T: 12p, P1: 12p, P2: 12p, P3: 10p.

För **godkänt** krävs minst 9p på var och en av delarna T och P1.

För betyg A–E krävs **dels** godkänt och **dels** poäng enligt:

För betyg	A	B	C	D	E	
krävs totalt	37	32	-	25	-	poäng
varav	-	12	8	-	-	på delarna P2 och P3 tillsammans
och	5	-	-	-	-	på del P3

Omdömet FX, dvs rätt att komplettera för betyg E, ges för skrivning som inte är godkänd, men nått minst 18p totalt.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.

Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL T

Godkänd uppgift 1 på lsA ht15 ger automatiskt full poäng på uppgift i ($i = 1, 2, 3$) och det ger då ingen ytterligare poäng att lösa den uppgiften på skrivningen.

1a) (1p) Hur definieras att graferna $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ är **isomorfa**?

b) (1p) Vad är en **eulerkrets** (eng. closed Eulerian walk) i en graf $G = (V, E)$?

c) (1p) Formulera Halls villkor för att en bipartit graf $G = (X \cup Y, E)$ ($X \cap Y = \emptyset$) skall ha en matchning där alla X -hörn är matchade.

2a) (1p) Hur definieras att en funktion $f : X \rightarrow Y$ är en **surjektion**?

b) (1p) Hur definieras att en oändlig mängd X är **uppräknelig** (eng. countable)?

c) (1p) Formulera den **Fermats sats** som handlar om vissa potenser av heltal.

3a) (1p) Hur definieras att en binär relation $\mathcal{R}$ är **reflexiv**?

b) (1p) På hur många sätt kan man välja n gånger bland k saker, då man inte tar hänsyn till ordningen och samma element kan väljas flera gånger?

c) (1p) Uttryck **binomialtalet** $\binom{66}{32}$ utan att använda annat än heltal, faktorer, potenser och de enkla räknesätten.

4a) (1p) Hur definieras **Eulers ϕ -funktion**? (Dvs vad är $\phi(n)$ för $n \in \mathbb{Z}_+$?)

b) (1p) Hur definieras att en permutation $\pi \in S_n$ är **udda**?

c) (1p) Vad är $|S_n|$ för $n \in \mathbb{Z}_+$? (Dvs hur många permutationer av $\{1, 2, \dots, n\}$ finns det?)

Vänd!

DEL P1

Godkänd uppgift 2 på lsiA ht15 ger automatiskt full poäng på uppgift 4 + i ($i = 1, 2, 3$) och det ger då ingen ytterligare poäng att lösa den uppgiften på skrivningen.

5) (3p) $G = (V, E)$ är en sammanhängande graf, som då den ritas utan korsande kanter (eng. edges) på ytan av en sfär delar in sfärens yta i 24 områden. Hur många hörn (eng. vertices) och hur många kanter har G , om $\frac{4}{7}$ av hörnen har valens (eng. degree) 6 och de övriga har valens 4?

6) (3p) Avgör om 52 är inverterbart i $\mathbb{Z}_{323}$. Om det är det, finn inversen.

7) (3p) 27 olika böcker fördelas mellan 22 elever, 2 mentorer och rektorn. På hur många sätt kan det ske om ingen blir utan och varje elev får precis en bok? Svaret får innehålla heltal, faktorer, potenser och de fyra enkla räknesätten.

8) Permutationen $\alpha \in S_9$ ges (på tvåradsform) av $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 2 & 6 & 9 & 4 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) (1p) Ange α och α^{-1} på cykelform.

b) (2p) Finn på cykelform ett $\beta \in S_9$ med $\beta\alpha = \alpha^{-1}\beta$ (dvs $\alpha^{-1} = \beta\alpha\beta^{-1}$).

DEL P2

9a) (3p) Trädet $T = (V, E)$ har exakt ett hörn vardera med valenser 2, 3, ..., 7 och inga hörn med valens > 7 . Hur många löv (dvs hörn med valens 1) kan T ha?

b) (1p) Samma fråga med n i stället för 7, där $n \geq 2$.

10) Man har n st identiska svarta kulor och $2n + 1$ st med andra, olika, färger.

a) (2p) Visa att antalet väsentligt olika sätt att (oordnat) välja n st kulor är

$$\binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \dots + \binom{2n+1}{n}.$$

b) (2p) Finn ett slutet uttryck för summan i a). Det får bara innehålla n , heltal, potenser och de fyra enkla räknesätten. (Man får göra b) utan att ha gjort a).)

11) (4p) Vad blir (minsta icke-negativa) resten då

$$3821^{3421} + 3248^{3511}$$

divideras med $1083 (= 3 \cdot 19^2)$? Svaret skall ges som ett heltal.

DEL P3

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

12) (5p) Låt A , B , X vara mängder, med $A \cap B = \emptyset$, $|A| = a$, $|B| = b$ och $|X| = n$, där $a + b \geq n$, $n \geq a$ och $n \geq b$.

Hur många surjektioner $f : A \cup B \rightarrow X$, där f 's restriktioner till A och B är injektioner (dvs $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ och motsvarande för B) finns det?

(Svaret får innehålla a , b , n , potenser, faktorer och de fyra enkla räknesätten.)

13a) (2p) Finn alla positiva heltal k med π^k och σ konjugerade, då $\pi, \sigma \in S_7$ ges av $\pi(1) = 6, \pi(2) = 1, \pi(3) = 5, \pi(4) = 3, \pi(5) = 7, \pi(6) = 2, \pi(7) = 4,$

$$\sigma(1) = 7, \sigma(2) = 6, \sigma(3) = 5, \sigma(4) = 2, \sigma(5) = 3, \sigma(6) = 4, \sigma(7) = 1.$$

b) (3p) Låt $\pi \in S_{100}$ och $c(\pi)$ (antalet disjunkta cykler i π , inklusive 1-cykler) vara 17. Om $\sigma = (1\ 2)(3\ 4\ 5) \in S_{100}$, vilka värden är möjliga för $c(\pi\sigma)$?

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.