

Lösningar tenta TENA SF1630(/1631) DISKRET MATEMATIK, D3
8 januari 2016

Tryckfel kan förekomma.

- 1a)** (1p) Graferna $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ är isomorfa omm det finns en bijektion $\phi: V_1 \rightarrow V_2$ sådan att $\{x, y\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\phi(x), \phi(y)\} \in E_2$ för alla $x, y \in V_1$
b) (1p) Grafen $T = (V, E)$ är ett träd omm den är sammanhängande och saknar cykler.
c) (1p) I en sammanhängande, plan graf gäller (med givna beteckningar) $v - e + r = 2$.

- 2a)** (1p) Att en funktion $f: X \rightarrow Y$ är en **surjektion** betyder att det för varje $y \in Y$ finns **minst ett** $x \in X$ med $y = f(x)$.
b) (1p) $ax + by = c$ för några $x, y \in \mathbb{Z}$ omm $\text{sgd}(a, b) \mid c$.
c) (1p) $|A| = |B|$ betyder att det finns en bijektion $f: A \rightarrow B$.

- 3a)** (1p) En binär relation $\mathcal{R}$ på mängden X är **transitiv** omm $(x\mathcal{R}y \text{ och } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$ för alla $x, y, z \in X$.
b) (1p) Antalet **injektioner** $f: X \rightarrow Y$ då $|X| = p$, $|Y| = q$ är $(q)_p = \frac{q!}{(q-p)!}$ ($=0$ då $p > q$).
c) (1p) Rekursionsformeln för stirlingtalen ger $S(767, 67) = S(766, 66) + 67 \cdot S(766, 67)$, så $S(766, 67) = \frac{1}{67}(S(767, 67) - S(766, 66))$.

- 4a)** (1p) **Möbius μ -funktion** ges av $\mu(n) = \begin{cases} (-1)^r, & \text{om } n \text{ är en produkt av } r \text{ olika primtal,} \\ 0, & \text{om } p^2 \mid n \text{ för något primtal } p. \end{cases}$
b) (1p) $\pi = (1\ 7\ 4\ 6)(2\ 9\ 3\ 8\ 5\ 10)$ har (cykellängder 4 och 6, så) ordning $o(\pi) = \text{mgm}(4, 6) = 12$.
c) (1p) Konjugerade permutationer har samma paritet, så 10 080 st.

- 5)** (3p) $G = (V, E)$ är en enkel graf med 3 komponenter, valenser $(2, 2, 3, 3, 5, 5)$, $(2, 2, 2, 2)$ respektive $(3, 3, 4, 4, 4)$. Vi söker det minimala antalet kanter som måste läggas till E för att ge en enkel, eulersk graf och hur de nya kanterna skall dras.

Lösning:

Eftersom G saknar isolerade hörn är den utökade grafen eulersk omm den är sammanhängande och alla hörn har jämn valens. Man kan inte säkert lägga till någon kant mellan udda hörn i komponent 1 (de kan redan vara (är faktiskt) grannar), så det krävs minst 4 nya kanter (för att göra alla hörn i komponent 1 jämna). Det räcker också med 4 nya kanter, ty de kan ha en ände i varsitt av komponent 1:s udda hörn och två av dem gå till ett av komponent 2:s hörn och de andra två till varsitt udda hörn i komponent 3. Den uppkomna grafen är sammanhängande (kanter från komponent 1 till 2 och 3) och alla hörn är jämna.

Svar: Det krävs 4 nya kanter. De kan dras som beskrivet ovan.

- 6)** (3p) Vi söker alla $x \in \mathbb{Z}$ med $x \equiv_{28} 15$ och $x \equiv_{33} 29$.

Lösning:

Den första kongruensen ger $x = 15 + 28y$ för något $y \in \mathbb{Z}$.

Den andra ger villkor för y : $15 + 28y \equiv_{33} 29 \Leftrightarrow 28y \equiv_{33} 29 - 15 = 14 \stackrel{\text{sgd}(14, 33) = 1}{\Leftrightarrow} 1$

$\Leftrightarrow 2y \equiv_{33} 1 \equiv_{33} 34 \stackrel{\text{sgd}(2, 33) = 1}{\Leftrightarrow} y \equiv_{33} 17$, så $y = 17 + 33k$ för ett godtyckligt $k \in \mathbb{Z}$ och alla lösningar x ges av $x = 15 + 28(17 + 33k) = 491 + 924k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$7 = 91 - 2 \cdot 42 = 91 - 2 \cdot (133 - 91) = -2 \cdot 133 + 3 \cdot 91$ ger (dividera med 7) $1 = -2 \cdot 19 + 3 \cdot 13$, så (multiplicera med 98) $13 \cdot 294 + 19(-196)$.

(Man kan också göra som i kompendiet om kinesiska restsatsen. Man finner att $561 \equiv_{28} 1$, $\equiv_{33} 0$, $364 \equiv_{28} 0$, $\equiv_{33} 1$ och $x = 561 \cdot 15 + 364 \cdot 29 + 28 \cdot 33 \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$.)

Svar: Alla lösningar ges av $x = 491 + 924k$, $k \in \mathbb{Z}$.

7) (3p) Vi söker antalet $x \in \mathbb{N}$ med $3 \cdot 10^{13} < x < 10^{14}$ och (i bas 10) var och en av siffrorna 1, 2, ..., 9 precis en gång och inga 0:or jämte varandra.

Lösning:

$3 \cdot 10^{13} < x < 10^{14}$ betyder att första siffran i x (i bas 10) måste vara någon av 3, ..., 9 (7 st) och innehålla 14 siffror, så 5 st 0:or.

Siffrorna 1, ..., 9 kan ordnas inbördes på $7 \cdot 8!$ sätt (vilken först? vilken ordning mellan övriga?).

0:orna kan placeras in på $\binom{9}{5} = \frac{9!}{5! \cdot 4!}$ sätt (en i vilka 5 av mellanrummen mellan övriga siffror och sist?).

Enligt multiplikationsprincipen är det sökta antalet x : $7 \cdot 8! \cdot \binom{9}{5} = \frac{7 \cdot 8! \cdot 9!}{4! \cdot 5!}$.

Svar: Antalet sådana x är $\frac{7 \cdot 8! \cdot 9!}{4! \cdot 5!} (= 35\,562\,240)$.

8) $\pi \in S_8$ ges av $\frac{i}{\pi(i)} \mid \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 3 & 5 & 1 & 2 & 4 & 6 \end{matrix}$.

Vi söker (på cykelform) (a, 1p) π^3 och (b, 2p) ett $\sigma \in S_8$ sådant att $\pi\sigma$ är en 8-cykel.

Lösning:

a. π på cykelform är $\pi = (1\,7\,4\,5)(2\,8\,6)$ ($\pi(1) = 7$, $\pi(7) = 4$, ...), så $\pi^3 = (1\,5\,4\,7)$ (resten 1-cykler).

b. T.ex. $\pi\sigma = (1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8)$ ger

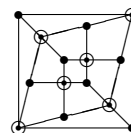
$\sigma = \pi^{-1}(1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8) = (1\,5\,4\,7)(2\,6\,8)(1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8) = (1\,6)(2\,3\,7)(5\,8)$.

Svar a: $\pi^3 = (1\,5\,4\,7)$, b: Ett sådant σ är $(1\,6)(2\,3\,7)(5\,8)$.

9) (4p) Vi skall avgöra om grafen i figuren har någon hamiltonstig.

Lösning:

Grafen är enligt figuren bipartit. I en hamiltonstig kan antalet X -hörn och antalet Y -hörn skilja sig med högst 1 (de ligger vartannat), men i vår graf är skillnaden 2. **Svar: Grafen har ingen hamiltonstig.**



10) (4p) Sju tentander besvarar slumpmässigt, likafördelat och oberoende, en fråga med 5 möjliga svar. Vi söker sannolikheten att varje svar ges av minst en tentand.

Lösning:

Svaren beskrivs av en funktion från en 7-mängd (tentanderna) till en 5-mängd (svaren). Sökt är sannolikheten att funktionen är en surjektion, då varje funktion är lika sannolik (enligt antagandet om slumpmässiga svar).

Den sökta sannolikheten är $\frac{|\{\text{surjektioner}\}|}{|\{\text{funktioner}\}|} = \frac{5! \cdot S(7,5)}{5^7} = \frac{5! \cdot 140}{5^7} = \frac{28 \cdot 4!}{5^5}$, där stirlingtalet $S(7,5) = 140$ enligt "triangeln" till höger.

		1				
	1		1			
1	3		1			
7	6		1			
	25		10		1	
		65		15		
			140			

Svar: Den sökta sannolikheten är $\frac{28 \cdot 4!}{5^5} (= 0,21504)$.

11) (4p) $2n$ personer ($n \in \mathbb{Z}_+$) spelar under $2n - 1$ dagar en turnering alla mot alla (utan oavgjorda matcher). Var och en spelar en match om dagen.

Vi ska visa att det finns en injektion $f : \{\text{speldagarna}\} \rightarrow \{\text{personerna}\}$, sådan att personen $f(d)$ vann sin match dag d , för alla speldagar d .

Lösning:

Låt $G = (D \cup P, E)$ vara den bipartita grafen med $D = \{\text{speldagarna}\}$, $P = \{\text{personerna}\}$ och $\{d, p\} \in E$ omm $p \in P$ vann sin match dag $d \in D$. Det gäller då precis att visa att det finns en fullständig (för D) matchning i G .

Enligt Halls sats finns en sådan matchning omm $|J(A)| \geq |A|$ för varje $A \subseteq D$ (med gängse beteckningar, dvs $J(A)$ är mängden personer som vunnit sin match minst en av dagarna i A).

Om $J(A) = P$ är $|J(A)| = 2n > 2n - 1 = |D| \geq |A|$. **Annars** finns en person som inte vunnit någon av dagarna i A . De $|A|$ personer den personen spelat mot under A -dagarna har alla vunnit minst en dag i A , så de tillhör $J(A)$ och $|J(A)| \geq |A|$. **Saken är klar.**

12) (5p) Vi söker alla $x \in \mathbb{Z}$ med $466x^{1709} - 434x^{198} + 696x^{90} \equiv 496 \pmod{899}$.

Lösning:

$899 = 29 \cdot 31$ och 29 och 31 är relativt prima, så $a \equiv_{899} b \Leftrightarrow (a \equiv_{29} b \text{ och } a \equiv_{31} b)$.

Vi börjar med att finna alla x som ger kongruens mod 29 och mod 31.

$466 \equiv_{29} 2$, $-434 \equiv_{29} 1$, $696 \equiv_{29} 0$ och $496 \equiv_{29} 3$, så

$466x^{1709} - 434x^{198} + 696x^{90} \equiv_{29} 496 \Leftrightarrow 2x^{1709} + x^{198} \equiv_{29} 3$.

För alla $x \in \mathbb{Z}$ med $29 \nmid x$ är $x^{28} \equiv_{29} 1$ (Fermats lilla sats, 29 primtal), så för alla $x \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$ gäller $x^{28k+1} \equiv_{29} x$. $1709 = 28 \cdot 61 + 1$ och $198 = 28 \cdot 7 + 2$, så $2x^{1709} + x^{198} \equiv_{29} 2x + x^2$.

$2x + x^2 \equiv_{29} 3 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) \equiv_{29} 0 \Leftrightarrow (x \equiv_{29} 1 \text{ eller } x \equiv_{29} -3)$ (igen, 29 primtal).

$466 \equiv_{31} 1$, $-434 \equiv_{31} 0$, $696 \equiv_{31} 14$ och $496 \equiv_{31} 0$, så

$466x^{1709} - 434x^{198} + 696x^{90} \equiv_{31} 496 \Leftrightarrow x^{1709} + 14x^{90} \equiv_{31} 0 \Leftrightarrow x^{89}(x^{1620} + 14x) \equiv_{31} 0$.

Som ovan (31 också primtal), för alla $x \in \mathbb{Z}$ gäller $x \equiv_{31} 0$ eller $x^{30} \equiv_{31} 1$. $1620 = 30 \cdot 54$, så $x^{89}(x^{1620} + 14x) \equiv_{31} 0 \Leftrightarrow (x \equiv_{31} 0 \text{ eller } 1 + 14x \equiv_{31} 0)$ (igen, 31 primtal).

Euklides: $31 = 14 \cdot 2 + 3$, $14 = 3 \cdot 4 + 2$, $3 = 2 \cdot 1 + 1$, så $1 = 3 - (14 - 4 \cdot 3) = -14 + 5(31 - 2 \cdot 14) = 5 \cdot 31 - 11 \cdot 14$ och $1 + 14x \equiv_{31} 0 \Leftrightarrow 14(x - 11) \equiv_{31} 0 \Leftrightarrow x \equiv_{31} 11$ (åter, 31 primtal).

De sökta $x \in \mathbb{Z}$ är alltså de som både uppfyller en av $x \equiv_{29} 1$ och $x \equiv_{29} -3$ och en av $x \equiv_{31} 0$ och $x \equiv_{31} 11$, fyra möjligheter.

$x \equiv_{31} 0 \Leftrightarrow x = 31y$ för något $y \in \mathbb{Z}$. $\text{sgd}(2,29)=1$

Då: $x \equiv_{29} 1 \Leftrightarrow 31y \equiv_{29} 1 \Leftrightarrow 2y \equiv_{29} 30 \Leftrightarrow y \equiv_{29} 15 \Leftrightarrow x \equiv_{31 \cdot 29} 31 \cdot 15 \Leftrightarrow x \equiv_{899} 465$

och: $x \equiv_{29} -3 \Leftrightarrow 31y \equiv_{29} -3 \Leftrightarrow 2y \equiv_{29} 26 \Leftrightarrow y \equiv_{29} 13 \Leftrightarrow x \equiv_{31 \cdot 29} 31 \cdot 13 \Leftrightarrow x \equiv_{899} 403$.

$x \equiv_{31} 11 \Leftrightarrow x = 31y + 11$ för något $y \in \mathbb{Z}$.

Då: $x \equiv_{29} 1 \Leftrightarrow 31y + 11 \equiv_{29} 1 \Leftrightarrow 2y \equiv_{29} 48 \Leftrightarrow y \equiv_{29} 24 \Leftrightarrow x \equiv_{31 \cdot 29} 31 \cdot 24 + 11 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \equiv_{899} 755$

och: $x \equiv_{29} -3 \Leftrightarrow 31y + 11 \equiv_{29} -3 \Leftrightarrow 2y \equiv_{29} 44 \Leftrightarrow y \equiv_{29} 22 \Leftrightarrow x \equiv_{31 \cdot 29} 31 \cdot 22 + 11 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \equiv_{899} 693$.

Svar: Alla lösningar x ges av $899k +$ en av $403, 465, 693$ och 755 för $k \in \mathbb{Z}$.

13) (5p) Vi skall visa $\sum_{d|n} \mu(d) \lambda(\frac{n}{d}) = \eta(n) \lambda(n)$, då, för $n = \prod_{i=1}^k p_i^{e_i}$ (p_i :na olika primtal, alla $e_i \in \mathbb{Z}_+$), $\eta(n) = 2^k$ och $\lambda(n) = (-1)^{e_1 + \dots + e_k}$.

Lösning:

Enligt satsen om möbiusinversion ($f = \mu * g \Leftrightarrow g = 1 * f = f * 1$) är påståendet ekvivalent med att $\lambda(n) = \sum_{d|n} \eta(d) \lambda(d)$, som vi alltså skall visa för alla $n \in \mathbb{Z}_+$.

$\sum_{d|1} \eta(d) \lambda(d) = \eta(1) \lambda(1) = 1 \cdot 1 = 1 = \lambda(1)$, så påståendet är sant för $n = 1$.

Om $n = \prod_{i=1}^k p_i^{e_i}$ ($k \in \mathbb{Z}_+$, p_i :na olika primtal, alla $e_i \in \mathbb{Z}_+$) gäller att

$\eta(n) = 2^k = \prod_{i=1}^k 2^1 = \prod_{i=1}^k \eta(p_i^{e_i})$ och $\lambda(n) = (-1)^{e_1 + \dots + e_k} = \prod_{i=1}^k (-1)^{e_i} = \prod_{i=1}^k \lambda(p_i^{e_i})$ (dvs η och λ är multiplikativa aritmetiska funktioner (eftersom också $\eta(1) = \lambda(1) = 1$)).

$d | n$ omm $d = \prod_{i=1}^k p_i^{f_i}$ med $f_i \in \mathbb{Z}_+, \leq e_i$, så $\sum_{d|n} \eta(d) \lambda(d) =$

$= \sum_{0 \leq f_i \leq e_i} \prod_{i=1}^k \eta(p_i^{f_i}) \lambda(p_i^{f_i}) = \prod_{i=1}^k \sum_{f_i=0}^{e_i} \eta(p_i^{f_i}) \lambda(p_i^{f_i}) = \prod_{i=1}^k \sum_{d|p_i^{e_i}} \eta(d) \lambda(d)$, dvs den aktuella summan är, liksom $\lambda(n)$, en multiplikativ aritmetisk funktion och det räcker att visa likheten för $n = p^e$, p primtal och $e \in \mathbb{Z}_+$.

$\sum_{d|p^e} \eta(d) \lambda(d) = \sum_{f=0}^e \eta(p^f) \lambda(p^f) = \underbrace{1 - 2 + 2 - 2 + \dots}_{e+1 \text{ st termer}} = (-1)^e = \lambda(p^e)$. **Saken är klar.**