

**Tentamen TENA i kurs
SF1630(/SF1631), DISKRET MATEMATIK för D m.fl.
fredagen den 8 januari 2016, klockan 8.00–13.00.**

Examinator: Bengt Ek, tel 790 6951.

Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Maximal poäng på de olika delarna är T: 12p, P1: 12p, P2: 12p, P3: 10p.

För **godkänt** krävs minst 9p på var och en av delarna T och P1.

För betyg A–E krävs **dels** godkänt och **dels** poäng enligt:

För betyg	A	B	C	D	E	
krävs totalt	37	32	-	25	-	poäng
varav	-	12	8	-	-	på delarna P2 och P3 tillsammans
och	5	-	-	-	-	på del P3

Omdömet FX, dvs rätt att komplettera för betyg E, ges för skrivning som inte är godkänd, men nått minst 18p totalt.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.

Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

Godkänd uppgift 1 på lsA ht15 ger automatiskt full poäng på uppgift i ($i = 1, 2, 3$) och det ger då ingen ytterligare poäng att lösa den uppgiften på skrivningen.

DEL T

1a) (1p) Hur definieras att graferna $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ är **isomorfa**?

b) (1p) Hur definieras att en graf $T = (V, E)$ är ett **träd**?

c) (1p) Vilket samband gäller mellan antalen hörn ($v = |V|$), kanter ($e = |E|$) och ytor (r) för en sammanhängande, plan graf $G = (V, E)$?

2a) (1p) Hur definieras att en funktion $f : X \rightarrow Y$ är en **surjektion**?

b) (1p) Ange ett (enkelt) nödvändigt och tillräckligt villkor på $a, b, c \in \mathbb{Z}$ för att det skall finnas $x, y \in \mathbb{Z}$ med $ax + by = c$.

c) (1p) Hur **definieras** att $|A| = |B|$, dvs att mängderna A, B har samma kardinalitet? (Det räcker inte att skriva att "de har lika många element" eller liknande.)

3a) (1p) Hur definieras att en binär relation $\mathcal{R}$ på mängden X är **transitiv**?

b) (1p) Hur många **injektioner** $f : X \rightarrow Y$ finns det då $|X| = p$, $|Y| = q$?

c) (1p) Uttryck $S(766, 67)$ med $S(767, 67)$ och $S(766, 66)$ ($S(n, k)$ är Stirlingtal).

4a) (1p) Hur definieras **Möbius μ -funktion**? (Dvs vad är $\mu(n)$ för $n \in \mathbb{Z}_+$?)

b) (1p) Låt $\pi \in S_{10}$ (på cykelform) ges av $\pi = (1\ 7\ 4\ 6)(2\ 9\ 3\ 8\ 5\ 10)$.

Vad är π 's **ordning** (dvs det minsta $n \in \mathbb{Z}_+$ med $\pi^n = id$)?

c) (1p) Antalet permutationer i S_9 som är konjugerade med den udda permutationen π är 10080. Hur många av dem är udda permutationer?

DEL P1

Godkänd uppgift 2 på lsiA ht15 ger automatiskt full poäng på uppgift 4 + i ($i = 1, 2, 3$) och det ger då ingen ytterligare poäng att lösa den uppgiften på skrivningen.

5) (3p) En enkel (inga loopar, inga multipla kanter) graf $G = (V, E)$ består av 3 komponenter med valenser $(2, 2, 3, 3, 5, 5)$, $(2, 2, 2, 2)$ respektive $(3, 3, 4, 4, 4)$.

Ange det minsta antalet kanter som kan läggas till i G så att en enkel graf som har en eulerkrets (eng. closed Eulerian walk) fås. Hur kan de nya kanterna då dras?

6) (3p) Finn alla $x \in \mathbb{Z}$ som uppfyller

$$x \equiv 15 \pmod{28} \quad \text{och} \quad x \equiv 29 \pmod{33}.$$

7) (3p) Hur många $x \in \mathbb{N}$ med $3 \cdot 10^{13} < x < 10^{14}$ innehåller (skrivet i bas 10) var och en av siffrorna $1, 2, \dots, 9$ precis en gång och inga 0:or intill varandra?

Svaret får innehålla heltal, faktulteter, potenser och de fyra enkla räknesätten.

8) Permutationen $\pi \in S_8$ ges av tabellen: $\frac{i}{\pi(i)} \left| \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 3 & 5 & 1 & 2 & 4 & 6 \end{array} \right.$.

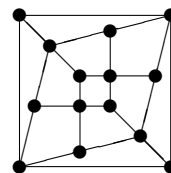
a) (1p) Ange π^3 (dvs $\pi\pi\pi$) på cykelform.

b) (2p) Ange på cykelform ett $\sigma \in S_8$ sådant att $\pi\sigma$ är en 8-cykel.

DEL P2

9) (4p) Har vidstående graf någon hamiltonstig?

Rita antingen en tydlig figur med ett exempel på en sådan eller visa att ingen finns.



10) (4p) Sju tentander besvarar (var för sig) en fråga som har 5 möjliga svar.

Om de svarar slumpmässigt, alla svaren lika sannolika (och oberoende av varandra), vad är sannolikheten att varje svar ges av minst en tentand?

Svaret får innehålla heltal, faktulteter, potenser och de fyra enkla räknesätten.

11) (4p) $2n$ personer ($n \in \mathbb{Z}_+$) spelar under $2n - 1$ dagar en turnering (utan oavgjorda matcher). Alla spelar en match om dagen, mot olika personer varje dag. Visa att det finns en **injektion** $f : \{\text{speldagarna}\} \rightarrow \{\text{personerna}\}$, sådan att för alla speldagar d gäller att personen $f(d)$ vann sin match dag d .

DEL P3

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

12) (5p) Finn alla $x \in \mathbb{Z}$ som uppfyller $(899 = 29 \cdot 31)$

$$466x^{1709} - 434x^{198} + 696x^{90} \equiv 496 \pmod{899}.$$

13) (5p) Låt $\eta(n) = 2^k$ och $\lambda(n) = (-1)^{e_1 + \dots + e_k}$ för $n = \prod_{i=1}^k p_i^{e_i}$ (p_i :na olika primtal, alla $e_i \in \mathbb{Z}_+$) ($\eta(1) = \lambda(1) = 1$).

Visa för alla $n \in \mathbb{Z}_+$ ($\sum_{d|n}$ summan över alla **positiva** delare till n , μ möbiusfunktionen):

$$\sum_{d|n} \mu(d) \lambda\left(\frac{n}{d}\right) = \eta(n) \lambda(n).$$

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.