

Lösningar tenta TENA SF1630(/1631) DISKRET MATEMATIK, D3

28 oktober 2014

Tryckfel kan förekomma.

- 1a)** (1p) Graferna $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ är **isomorfa** omm det finns en bijektion $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ sådan att $\{x, y\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\phi(x), \phi(y)\} \in E_2$ för alla $x, y \in V_1$
- b)** (1p) En graf $G = (V, E)$ är **sammanhängande** omm för varje $x, y \in V$ finns en vandring/väg/stig i G från x till y (om $x = y$ förbinds de av "nollvägen").
- c)** (1p) Det **kromatiska talet**, $\chi(G)$, för en graf $G = (V, E)$ är det minsta antalet färger som gör det möjligt att färga hörnen så att inga grannar har samma färg.

- 2a)** (1p) Att en funktion $f : X \rightarrow Y$ är en **injektion** betyder att för varje $y \in Y$ finns **högst ett** $x \in X$ med $y = f(x)$.
- b)** (1p) En mängd X har **kardinalitet** n omm det finns en bijektion $f : \mathbb{N}_n \rightarrow X$, där $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$.
- c)** (1p) **Postfacksprincipen** säger att om $|X| > |Y|$ finns ingen injektion $f : X \rightarrow Y$.
(Flera alternativ möjliga, t.ex. "Om n brev ligger i n postfack finns minst ett fack med minst två brev".)

- 3a)** (1p) En binär relation $\mathcal{R}$ på en mängd X är **symmetrisk** omm $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ för alla $x, y \in X$.
- b)** (1p) Antalet sätt att välja n gånger bland k saker, utan hänsyn till ordningen och med möjliga upprepningar, är $\binom{n+k-1}{k-1} = \frac{(n+k-1)!}{n! \cdot (k-1)!}$.
- c)** (1p) Antalet **funktioner** $f : X \rightarrow Y$, då $|X| = m$, $|Y| = n$, är n^m .

- 4a)** (1p) **Möbius μ -funktion** ges av $\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ (-1)^k, & n \text{ en produkt av } k \text{ olika primtal,} \\ 0, & n \text{ delbart med någon primtalskvadrat.} \end{cases}$
- b)** (1p) $\pi \in S_n$ är **udda** omm den är en produkt av ett udda antal transpositioner (2-cykler).
- c)** (1p) Permutationerna $\alpha, \beta \in S_n$ är **konjugerade** omm det finns $\sigma \in S_n$ med $\beta = \sigma\alpha\sigma^{-1}$.

- 5)** (3p) $G = (V, E)$ är en reguljär, eulersk graf. Vi skall visa att $|V|$ är en delare till $|E|$.

Lösning:

Låt G vara d -reguljär, dvs valensen $\delta(x) = d$ för alla $x \in V$. Eftersom G är eulersk är d enligt känd sats (Euler) ett jämnt tal.

I en graf gäller alltid $\sum_{x \in V} \delta(x) = 2|E|$, så i vårt fall $d|V| = 2|E|$ och $|E| = \frac{d}{2}|V|$.

$\frac{d}{2}$ är enligt ovan ett heltal, så $|V| \mid |E|$ och **saken är klar**.

- 6)** (3p) Vi söker alla $x \in \mathbb{Z}_{273}$ som uppfyller $45x + 147 = 0$.

Lösning:

Ekvationen svarar mot $45x + 147 = 273k$, dvs $45x - 273k = -147$, för något $k \in \mathbb{Z}$.

Eftersom $273 = 6 \cdot 45 + 3$, $45 = 15 \cdot 3$, är enligt Euklides $\text{sgd}(45, 273) = 3$ och ekvationen ekvivalent med (dividera med 3) $15x - 91k = -49$.

$273 = 6 \cdot 45 + 3$ ger (dividera med 3 och stuva om) $-1 = 15 \cdot 6 - 91$, så $-49 = 15(6 \cdot 49) - 91 \cdot 49 = 15 \cdot 294 - 91 \cdot 49 = 15(294 - 3 \cdot 91) - 91(49 - 3 \cdot 15) = 15 \cdot 21 - 91 \cdot 4$.

(x, k) löser då $15x - 91k = -49$ omm (subtrahera ledvis) $15(x - 21) = 91(k - 4)$ och alla x -lösningar ges av $x = 21 + 91n$, $n \in \mathbb{Z}$ (ty $\text{sgd}(15, 91) = 1$). De som svarar mot element i $\mathbb{Z}_{273}$ är ($n = 0, 1, 2$) $x = 21, 112, 203$.

(**Alternativt:** $45x + 147 \equiv_{273} 0$ är ekvivalent med $15x + 49 \equiv_{91} 0$ (dela med 3, också i modulen) och med $0 \equiv_{91} 90x + 294 \equiv_{91} -x + 21$ (multiplicera med 6, ok ty $\text{sgd}(6, 91) = 1$) och $x = 21 + 91n$ som ovan.

Eller: ("Eulers metod") $45x - 273k = -147 \Leftrightarrow x = 6k - 3 + \frac{3k-12}{45}$. Låt $y = \frac{3k-12}{45}$, så ekvationen med $x, k \in \mathbb{Z}$ är ekvivalent med $45y - 3k = -12 \Leftrightarrow k = 4 + 15y$ och $y \in \mathbb{Z}$. Insättning ger $x = 6(4 + 15y) - 3 + y = 21 + 91y$, $y \in \mathbb{Z}$.)

Svar: Alla lösningar i $\mathbb{Z}_{273}$ är **21, 112 och 203**.

7) (3p) 69 elever känner minst en av a och b , 71 minst en av b och c , 56 minst en av a och c , 39 känner a , 51 b och 42 c . Vi söker antalet som känner någon, men inte alla, av a, b, c .

Lösning:

Låt A, B, C vara mängderna elever som känner a, b respektive c .

Givet är att $|A \cup B| = 69, |B \cup C| = 71, |A \cup C| = 56, |A| = 39, |B| = 51, |C| = 42$.

Det ger (inklusion och exklusion) $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 39 + 51 - 69 = 21$ och p.s.s. $|B \cap C| = 51 + 42 - 71 = 22$ och $|A \cap C| = 39 + 42 - 56 = 25$.

Enligt principen om inklusion och exklusion är

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C|) + |A \cap B \cap C|.$$

Det ger den sökta $|A \cup B \cup C| - |A \cap B \cap C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C|) = 39 + 51 + 42 - (21 + 22 + 25) = 64$.

Svar: 64 elever känner någon, men inte alla, av a, b, c .

8) (3p) Vi söker antalet inverterbara element i $\mathbb{Z}_{1400}$.

Lösning:

$x \in \mathbb{Z}_{1400}$ är inverterbart omm $\text{sgd}(x, 1400) = 1$, så det sökta antalet är

$|\{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 1400, \text{sgd}(x, 1400) = 1\}| = \phi(1400)$, där ϕ är Eulers ϕ -funktion.

$1400 = 14 \cdot 100 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$, så (enligt känd sats) $\phi(1400) = (2-1)2^{3-1} \cdot (5-1)5^{2-1} \cdot (7-1)7^{1-1} = 1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 1 = 480$.

Svar: 480 element i $\mathbb{Z}_{1400}$ är inverterbara.

9) (4p) Vi söker antalet kanter i en plan sammanhängande graf med 22 hörn vars alla ytor har precis 4 kanter.

Lösning:

Låt v, e, r (som vanligt) vara antalen hörn, kanter och ytor i och vid grafen.

Då är $2e = \sum_{\text{ytorna}} (\text{antalen kanter vid varje})$ (kanterna räknas dubbelt), så $2e = 4r$, dvs $e = 2r$.

Enligt Eulers polyederformel (plan, sammanhängande graf) är

$v - e + r = 22 - 2r + r = 2$, så $r = 20$ och $e = 2 \cdot 20 = 40$.

Svar: Grafen har 40 kanter, inga andra möjligheter.

(Man kan med exempel visa att det verkligen finns en sådan graf, men det krävdes inte i uppgiften.)

10) Vi söker antalet "ord" (a, 1p) som kan bildas med 5 A:n, 4 B:n, 3 C:n, 2 D:n och ett E och (b, 3p) antalet sådana ord som inte har några A:n jämte varandra.

Lösning:

Det totala antalet sådana ord ges av multinomialtalet $\binom{15}{5,4,3,2,1} = \frac{15!}{5! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!}$ (antalet funktioner $\{1, 2, \dots, 15\} \rightarrow \{A, \dots, E\}$ som antar värdet A 5 gånger, B 4 gånger etc).

Antalet ord utan A:n intill varandra är antalet ord av övriga 10 bokstäver gånger (multiplikationsprincipen) antalet sätt att välja ut 5 positioner för A:na bland de 11 före, mellan och efter de övriga bokstäverna, dvs $\binom{10}{4,3,2,1} \cdot \binom{11}{5} = \frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!} \cdot \frac{11!}{5! \cdot 6!}$.

Svar a: $\frac{15!}{5! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!}$ (= 37 837 800) ord, **b:** $\frac{11! \cdot 10!}{6! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!}$ (= 5 821 200) ord.

11) $\pi \in S_7$ ges av $\pi = (14)(263)(57)$. Vi skall avgöra om det finns $k \in \mathbb{N}$, $\sigma \in S_7$ med (a, 2p) $\sigma \pi^k \sigma^{-1} = (12)$ och (b, 2p) $\sigma \pi^k \sigma^{-1} = (123)$.

Lösning:

Eftersom $\alpha \in S_7$ och $\beta = \sigma \alpha \sigma^{-1}$ har samma cykelstruktur och det för varje $\beta \in S_7$ med samma cykelstruktur som α också finns ett sådant σ , finns k, σ som uppfyller villkoren omm det finns k sådant att π^k har cykelstruktur (a) $[1^5 2]$ respektive (b) $[1^4 3]$.

$\pi^k = (14)^k (263)^k (57)^k$. $(ab)^k$ är två 1-cykler om k är jämnt, en 2-cykel annars. $(abc)^k$ är tre 1-cykler om $3 \mid k$, en 3-cykel annars.

π^k kan alltså bara ha cykelstrukturerna $[2^2 3]$, $[1^4 3]$, $[1^3 2^2]$, $[1^7]$. Det betyder att svaret i a) är nej och i b) ja.

I b) kan man ta $k = 2$. Det ger $\pi^k = \pi^2 = (236)$ och vi vill ha $\sigma(236)\sigma^{-1} = (\sigma(2)\sigma(3)\sigma(6)) = (123)$. Ett möjligt val är $\sigma(2) = 1, \sigma(3) = 2, \sigma(6) = 3$, övriga godtyckliga, t.ex. $\sigma(1) = 4, \sigma(4) = 5, \sigma(5) = 6, \sigma(7) = 7$, så $\sigma = (145632)$. (Ett enklare val är $\sigma = (16)$.)

Svar a: Nej, sådana k, σ finns inte, b: Ja, de finns, t.ex. $k = 2, \sigma = (145632)$.

12) Vi söker resten då $28^{10^{2014}}$ divideras med (a, 2p) 13 och (b, 3p) $299 = 13 \cdot 23$.

Lösning:

Vi söker det x med $0 \leq x < m$ som uppfyller $x \equiv 28^{10^{2014}} \pmod{m}$, där $m = 13, 299$.

a. Eftersom $\text{sgd}(28, 13) = 1$ och 13 är primtal är $28^{12} \equiv_{13} 1$ (Fermats lilla sats), så om $x \equiv_{12} y$ är $28^x \equiv_{13} 28^y$ ($y = x + 12k \Rightarrow 28^y = 28^x \cdot (28^{12})^k \equiv_{13} 28^x \cdot 1^k = 28^x$).

$10^{2014} \equiv_{12} (-2)^{2014} = 4^{1007} \equiv_{12} 4$ (ty $4^2 = 16 \equiv_{12} 4$, så $4^n \equiv_{12} 4$ för $n = 1, 2, \dots$), så

$28^{10^{2014}} \equiv_{13} 28^4 \equiv_{13} 2^4 = 16 \equiv_{13} 3$.

b. Svaret i a) och $28^{10^{2014}} \pmod{23}$ bestämmer enligt kinesiska restsatsen vårt sökta x .

23 är primtal, så vi kan resonera som i a).

$10^{2014} \equiv_2 0^{2014} = 0$, så $10^{2014} = 2y$ för något $y \in \mathbb{Z}$. $10^{2014} \equiv_{11} (-1)^{2014} = 1$, så $2y \equiv_{11} 1$

och $y \equiv_{11} 6$ (kan förlänga med 6, ty $\text{sgd}(6, 11) = 1$), dvs $y = 6 + 11z$ för något $z \in \mathbb{Z}$.

Det ger $10^{2014} = 2(6 + 11z) = 12 + 22z$, dvs $10^{2014} \equiv_{22} 12$ och

$28^{10^{2014}} \equiv_{23} 28^{12} \equiv_{23} 5^{12} = 25^6 \equiv_{23} 2^6 = 64 \equiv_{23} 18$.

Det ger $28^{10^{2014}} = 18 + 23t$ för något $t \in \mathbb{Z}$. Enligt resultatet i a) gäller $18 + 23t \equiv_{13} 3$, så

$5 - 3t \equiv_{13} 3$, $3t \equiv_{13} 2$ och (förläng med 9 ($\text{sgd}(9, 13) = 1$)) $27t \equiv_{13} t \equiv_{13} 18 \equiv_{13} 5$, så $t = 5 + 13u$

för ett $u \in \mathbb{Z}$. Det ger $28^{10^{2014}} = 18 + 23t = 18 + 23(5 + 13u) = 133 + 299u \equiv_{299} 133$.

(Man kan förstås också använda metoden i sidorna om kinesiska restsatsen.)

Svar a: Den sökta resten är 3, b: Den sökta resten är 133.

13) $F, G: [1, \infty[\rightarrow \mathbb{C}, i)$ är ” $G(x) = \sum_{n \leq x} F(\frac{x}{n})$ ” och $ii)$ är ” $F(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)G(\frac{x}{n})$ ”.

Vi skall visa (a, 1p) $i) \Rightarrow ii)$ då $x = \frac{9}{2}$ och för $x \geq 1$: (b, 2p) $ii) \Rightarrow i)$ och (c, 2p) $i) \Rightarrow ii)$.

Lösning:

a. Vi antar $i)$ och visar $ii)$ för $x = \frac{9}{2}$.

Enligt $i)$ är $G(\frac{9}{2}) = F(\frac{9}{2}) + F(\frac{9}{4}) + F(\frac{3}{2}) + F(\frac{9}{8})$, $G(\frac{9}{4}) = F(\frac{9}{4}) + F(\frac{9}{8})$ och $G(\frac{3}{2}) = F(\frac{3}{2})$,

så HL i $ii)$ blir för $x = \frac{9}{2}$ (med $\mu(1) = 1$, $\mu(2) = \mu(3) = -1$, $\mu(4) = 0$) $\sum_{n \leq x} \mu(n)G(\frac{x}{n}) =$
 $= G(\frac{9}{2}) - G(\frac{9}{4}) - G(\frac{3}{2}) + 0 = (F(\frac{9}{2}) + F(\frac{9}{4}) + F(\frac{3}{2}) + F(\frac{9}{8})) - (F(\frac{9}{4}) + F(\frac{9}{8})) - (F(\frac{3}{2})) = F(\frac{9}{2}) =$
VL i $ii)$. **a-saken är klar.**

b. För ett fixt $x \geq 1$ antar vi $ii)$ och får för HL i $i)$: $\sum_{n \leq x} F(\frac{x}{n}) \stackrel{ii)}{=} \sum_{n \leq x} \sum_{m \leq \frac{x}{n}} \mu(m)G(\frac{x}{mn})$.
 $\{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{Z}_+, n \leq x, m \leq \frac{x}{n}\}$ svarar bijektivt med $r = mn$ mot
 $\{(m, r) \mid m, r \in \mathbb{Z}_+, r \leq x, m \mid r\}$, så summan blir $\sum_{r \leq x} G(\frac{x}{r}) \sum_{m \mid r} \mu(m)$.

Enligt en känd sats är $\sum_{m \mid r} \mu(m) = \delta(r) = \begin{cases} 1, & \text{då } r = 1, \\ 0, & \text{annars,} \end{cases}$ så HL i $i)$ blir

$\sum_{r \leq x} G(\frac{x}{r})\delta(r) = G(x) =$ VL i $i)$. **b-saken är också klar.**

c. För ett fixt $x \geq 1$ antar vi $i)$ och får för HL i $ii)$:

$\sum_{n \leq x} \mu(n)G(\frac{x}{n}) \stackrel{i)}{=} \sum_{n \leq x} \mu(n) \sum_{m \leq \frac{x}{n}} F(\frac{x}{mn})$, som kan behandlas som summan i b).

$\{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{Z}_+, n \leq x, m \leq \frac{x}{n}\}$ svarar bijektivt med $r = mn$ mot

$\{(n, r) \mid n, r \in \mathbb{Z}_+, r \leq x, n \mid r\}$, så summan blir $\sum_{r \leq x} F(\frac{x}{r}) \sum_{n \mid r} \mu(n)$.

Som i b) är $\sum_{n \mid r} \mu(n) = \delta(r)$ så HL i $ii)$ blir $\sum_{r \leq x} F(\frac{x}{r})\delta(r) = F(x) =$ VL i $ii)$.

Även c-saken är klar.