

Matematik, KTH
B.Ek

Tentamen TENA i kurs
SF1630(/SF1631), DISKRET MATEMATIK för D, F
tisdagen den 28 oktober 2014, klockan 8.00–13.00.

Examinator: Bengt Ek, tel 790 6951.

Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Maximal poäng på de olika delarna är T: 12p, P1: 12p, P2: 12p, P3: 10p.

För **godkänt** krävs minst 9p på var och en av delarna T och P1.

För betyg A–E krävs **dels** godkänt och **dels** poäng enligt:

För betyg	A	B	C	D	E	
krävs totalt	37	32	-	25	-	poäng
varav	-	12	8	-	-	på delarna P2 och P3 tillsammans
och	5	-	-	-	-	på del P3

Omdömet FX, dvs rätt att komplettera för betyg E, ges för skrivning som inte är godkänd, men nått minst 18p totalt.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.

Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL T

Godkänd uppgift 1 på lsiA ht14 ger automatiskt full poäng på uppgift i ($i = 1, 2, 3$) och det ger då ingen ytterligare poäng att lösa den uppgiften på skrivningen.

1a) (1p) Hur definieras att graferna $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ är **isomorfa**?

b) (1p) Hur definieras att en graf $G = (V, E)$ är **sammanhängande** (eng. connected)?

c) (1p) Vad menas med det **kromatiska talet**, $\chi(G)$, för en graf $G = (V, E)$?

2a) (1p) Hur definieras att en funktion $f : X \rightarrow Y$ är en **injektion**?

b) (1p) Hur definieras att en mängd X har **kardinalitet** n , $n \in \mathbb{N}$?

c) (1p) Formulera **postfacksprincipen** (eng. pigeonhole principle).

3a) (1p) Hur definieras att en binär relation $\mathcal{R}$ är **symmetrisk**?

b) (1p) På hur många sätt kan man välja n gånger bland k saker, då man inte tar hänsyn till ordningen och samma element kan väljas flera gånger?

c) (1p) Hur många **funktioner** $f : X \rightarrow Y$ finns det, då $|X| = m$, $|Y| = n$?

4a) (1p) Hur definieras **Möbius μ -funktion**? (Dvs vad är $\mu(n)$ för $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$?)

b) (1p) Hur definieras att en permutation $\pi \in S_n$ är **udda**?

c) (1p) Hur definieras att permutationerna $\alpha, \beta \in S_n$ är **konjugerade**?

Vänd!

DEL P1

Godkänd uppgift 2 på lsiA ht14 ger automatiskt full poäng på uppgift 4 + i ($i = 1, 2, 3$) och det ger då ingen ytterligare poäng att lösa den uppgiften på skrivningen.

5) (3p) Låt $G = (V, E)$ vara en reguljär, eulersk (dvs det finns en eulerkrets (= en sluten eulerväg) i den) graf. Visa att $|V|$, antalet hörn (eng. vertices) i G , är en delare till $|E|$, antalet kanter i G .

6) (3p) Finn alla $x \in \mathbb{Z}_{273}$ som löser ekvationen

$$45x + 147 = 0 \text{ i } \mathbb{Z}_{273}.$$

7) (3p) Av eleverna i en skola känner 69 minst en av a och b , 71 känner minst en av b och c , 56 känner minst en av a och c , 39 känner a , 51 känner b och 42 känner c . Hur många av dem känner minst en, men inte alla, av a , b och c ?

8) (3p) Hur många element i $\mathbb{Z}_{1400}$ är inverterbara? (Svaret ges som ett heltal.)

DEL P2

9) (4p) En plan sammanhängande graf har 22 hörn (eng. vertices) och alla ytor som grafen delar in planet i (också den yttre, obegränsade ytan) har precis 4 kanter (eng. edges).

Finn alla möjliga värden för antalet kanter i grafen.

10a) (1p) Hur många olika "ord" kan bildas med 5 A:n, 4 B:n, 3 C:n, 2 D:n och ett E? Alla 15 bokstäverna skall användas.

b) (3p) I hur många av orden i a) står inga A:n intill varandra?

Svaren får innehålla heltal, faktorer, potenser och de fyra enkla räknesätten.

11) Låt $\pi \in S_7$ ges av $\pi = (14)(263)(57)$.

a) (2p) Finns $k \in \mathbb{N}$ och $\sigma \in S_7$ sådana att $\sigma\pi^k\sigma^{-1} = (12)$?

b) (2p) Finns $k \in \mathbb{N}$ och $\sigma \in S_7$ sådana att $\sigma\pi^k\sigma^{-1} = (123)$?

(I vardera frågan, ge exempel på sådana k , σ , eller visa att inga finns.)

DEL P3

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

12a) (2p) Vad blir (minsta icke-negativa) resten då $28^{10^{2014}}$ (dvs $28^{(10^{2014})}$) divideras med 13?

b) (3p) Vad blir (minsta icke-negativa) resten då $28^{10^{2014}}$ divideras med 299? ($299 = 13 \cdot 23$. Svaren skall ges som heltal.)

13) Låt $F, G : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ (dvs för alla reella $x \geq 1$ är $F(x)$ och $G(x)$ komplexa tal).

$$\text{Låt } i) \text{ vara } "G(x) = \sum_{n \leq x} F\left(\frac{x}{n}\right)" \text{ och } ii) \text{ vara } "F(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)G\left(\frac{x}{n}\right)".$$

(n antar i båda summorna positiva heltalsvärden. $\mu(n)$ är Möbius μ -funktion.)

a) (1p) Visa att $i) \Rightarrow ii)$ då $x = \frac{9}{2}$.

b) (2p) Visa att $ii) \Rightarrow i)$ för alla reella $x \geq 1$.

c) (2p) Visa att $i) \Rightarrow ii)$ för alla reella $x \geq 1$.