

Lösningar tenta TENA SF1630(/1631) DISKRET MATEMATIK, D3

8 januari 2015

Tryckfel kan förekomma.

- 1a)** (1p) Graferna $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ är **isomorfa** omm det finns en bijektion $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ sådan att $\{x, y\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\phi(x), \phi(y)\} \in E_2$ för alla $x, y \in V_1$
- b)** (1p) En **hamiltoncykel** i en graf $G = (V, E)$ är en cykel (dvs en följd $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$ med $v_i \in V$, $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ och alla v_i olika) som innehåller alla grafens hörn.
- c)** (1p) **Halls sats** säger att en bipartit graf $(X \cup Y, E)$ har en fullständig matchning av X -hörnen omm för varje $A \subseteq X$ gäller $|J(A)| \geq |A|$, där $J(A) = \{y \in Y \mid \{x, y\} \in E\}$.

- 2a)** (1p) Att en funktion $f : X \rightarrow Y$ är en **bijektion** betyder att för varje $y \in Y$ finns **precis ett** $x \in X$ med $y = f(x)$.
- b)** (1p) En mängd X är **överuppräknelig** omm det inte finns någon bijektion $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ eller $f : \mathbb{N}_n \rightarrow X$, där $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ för $n \in \mathbb{N}$.
- c)** (1p) **Postfacksprincipen** säger att om $|X| > |Y|$ finns ingen injektion $f : X \rightarrow Y$.
(Flera alternativ möjliga, t.ex. "Om n brev ligger i m postfack, $n > m$, finns minst ett fack med minst två brev".)

- 3a)** (1p) En binär relation $\mathcal{R}$ på en mängd X är **transitiv** omm $(x\mathcal{R}y \text{ och } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$ för alla $x, y, z \in X$.
- b)** (1p) Antalet **bijektioner** $f : X \rightarrow Y$ då $|X| = m$, $|Y| = n$ är $\begin{cases} n!, & \text{om } m = n, \\ 0, & \text{om } m \neq n. \end{cases}$
- c)** (1p) Om A, B, C är ändliga mängder säger **principen om inklusion och exklusion** att $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$.

- 4a)** (1p) **Eulers ϕ -funktion** ges av $\phi(n) = |\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq n, \text{sgd}(x, n) = 1\}| (= |U_n|)$.
(Korrekt svar som anger hur $\phi(n)$ beräknas utgående från n 's primtalsfaktorisering godtas också.)
- b)** (1p) En **permutation** av en mängd X är en bijektion $\pi : X \rightarrow X$.
- c)** (1p) Permutationen $\pi \in S_n$ är **jämn** omm den kan skrivas som en produkt av ett jämnt antal transpositioner (dvs några $\tau \in S_n$ med, för några $i \neq j$, $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$, $\tau(k) = k$ om $k \neq i, j$).

- 5)** (3p) Vi söker möjliga värden för $|V|$ då grafen $G = (V, E)$ är reguljär, sammanhängande och plan och $|V|$ är lika med antalet områden G delar in planet i.

Lösning:

Eftersom G är sammanhängande och plan (och $v > 0$) är (med vanliga beteckningar) $v - e + r = 2$ (Eulers polyederformel). Med $v = r$ ger det $2v - e = 2$.

I en graf gäller alltid $\sum_{x \in V} \delta(x) = 2e$, så om G är d -reguljär är $v \cdot d = 2e$, så $e = \frac{d}{2}v$.

Det ger $2v - \frac{d}{2}v = 2$, så $(4 - d)v = 4$. $4 - d \mid 4$ så $4 - d = 1, 2, 4$:

- $4 - d = 1$, $d = 3$ ger $v = 4 = r$, $e = 6$, grafen K_4 ,
- $4 - d = 2$, $d = 2$ ger $v = r = 2 = e$, 2 hörn, dubbla kanter mellan (inte en enkel graf),
- $4 - d = 4$, $d = 0$ ger $v = r = 1$, $e = 0$, grafen med ett hörn och inga kanter.

Svar: Möjliga antal områden är 1 och 4 (och, med G icke-enkel, 2).

- 6)** (3p) Vi söker alla $x, y \in \mathbb{Z}$ med $91x + 133y = 686$.

Lösning:

Eftersom $133 = 1 \cdot 91 + 42$, $91 = 2 \cdot 42 + 7$, $42 = 6 \cdot 7 + 0$, är enligt Euklides $\text{sgd}(91, 133) = 7$ och ekvationen ekvivalent med (dividera med 7) $13x + 19y = 98$.

$7 = 91 - 2 \cdot 42 = 91 - 2 \cdot (133 - 91) = -2 \cdot 133 + 3 \cdot 91$ ger (dividera med 7) $1 = -2 \cdot 19 + 3 \cdot 13$, så (multiplicera med 98) $13 \cdot 294 + 19(-196)$.

(x, y) löser då $13x + 19y = 98$ omm (subtrahera ledvis) $13(x - 294) = -19(y + 196)$ och alla lösningar ges av $x = 294 + 19n$, $y = -196 - 13n$, $n \in \mathbb{Z}$ (ty $\text{sgd}(13, 19) = 1$ etc.). $n = k - 15$ ger en trevligare form: $x = 9 + 19k$, $y = -1 - 13k$, $k \in \mathbb{Z}$.

(**Alternativt:** ("Eulers metod") $91x + 133y = 686 \Leftrightarrow x = 7 - y + \frac{49-42y}{91}$. Låt $z = \frac{49-42y}{91} (\in \mathbb{Z})$, så $42y + 91z = 49$ och $y = 1 - 2z + \frac{7-7z}{42}$. Låt nu $m = \frac{7-7z}{42} (\in \mathbb{Z})$, så $42m + 7z = 7$ och $z = 1 - 6m$. Insättning ger $y = 1 - 2(1 - 6m) + m = -1 + 13m$, $x = 7 - (-1 + 13m) + (1 - 6m) = 9 - 19m$, $m \in \mathbb{Z}$. Samma lösningar som ovan.)

Svar: Alla lösningar ges av $\begin{cases} x = 9 + 19k, \\ y = -1 - 13k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$

7) (3p) Vi söker antalet fördelningar av 11 saffransbullar och 25 andra bullar (inbördes identiska) bland 16 (särskiljbara) barn, så att varje barn får minst en bulle, varav högst en saffransbulle.

Lösning:

Saffransbullarna kan fördelas på $\binom{16}{11} = \frac{16!}{11! \cdot 5!}$ (ta ut de barn som får en).

Övriga 5 barn får varsin bulle och sedan återstår att fördela 20 bullar bland de 16 barnen, vilket kan göras på $\binom{20+15}{15} = \frac{35!}{15! \cdot 20!}$ sätt (välj 15 väggar bland bullväggarna).

Enligt multiplikationsprincipen är det sökta antalet fördelningar $\binom{16}{11} \cdot \binom{35}{15} = \frac{16 \cdot 35!}{11! \cdot 5! \cdot 20!}$.

Svar: Det finns $\frac{16 \cdot 35!}{11! \cdot 5! \cdot 20!} (= 14\,187\,015\,722\,880)$ sådana fördelningar.

8) (3p) Vi söker det maximala antalet parvis icke-konjugerade udda permutationer i S_7 .

Lösning:

Konjugering är en ekvivalensrelation i S_n och konjugerade permutationer har samma paritet, så det gäller att finna antalet ekvivalensklasser med udda permutationer i S_7 (maximala antalet fås genom att ta en ur varje sådan klass), dvs cykelstrukturer med ett udda antal cykler av jämn längd (= de med ett jämnt antal cykler).

De strukturerna är: $[6\,1]$, $[5\,2]$, $[4\,3]$, $[4\,1^3]$, $[3\,2\,1^2]$, $[2^3\,1]$, $[2\,1^5]$, totalt 7 stycken.

Svar: Det maximala antalet sådana permutationer är 7.

9) (4p) Vi söker alla $x \in \mathbb{Z}$ med $x \equiv 21^{41} \pmod{11}$ och $x \equiv 51^{61} \pmod{31}$.

Lösning:

11 är primtal och $\text{sgd}(21, 11) = 1$, så $21^{10} \equiv_{11} 1$ (Fermat) och $21^{41} \equiv_{11} 1^4 \cdot 21 \equiv_{11} 10$.

P.s.s. fås $51^{30} \equiv_{31} 1$ och $51^{61} \equiv_{31} 1^2 \cdot 51 \equiv_{31} 20$.

Den första ger att $x = 10 + 11t$ för något $t \in \mathbb{Z}$. Vilka t som är möjliga bestäms av den andra, $10 + 11t \equiv_{31} 20 \Leftrightarrow 11t \equiv_{31} 10 \Leftrightarrow (\text{sgd}(3, 31) = 1, \text{ så } 3 \text{ inverterbart}) \ 2t \equiv_{31} 33t \equiv_{31} 30 = 2 \cdot 15 \Leftrightarrow (\text{sgd}(2, 31) = 1, \text{ så } 2 \text{ inverterbart}) \ t \equiv_{31} 15$, så $t = 15 + 31k$, k godtyckligt heltal.

Det ger $x = 10 + 11(15 + 31k) = 175 + 341k$

Svar: Alla lösningar ges av $x = 175 + 341k$, k godtyckligt heltal.

(Man kan förstås också få x som i stencilen om kinesiska restsatsen.)

10) (4p) Vi visar att ett träd $T = (V, E)$ med $|V| \geq 2$, har minst två hörn med valens ett.

Lösning:

Eftersom T är sammanhängande och $|V| \geq 2$ är $\delta(v) \geq 1$ för alla $v \in V$.

Antag (för motsägelse) att $\delta(v) \geq 2$ för alla v utom högst ett. Då är

$$\sum_{v \in V} \delta(v) \geq 2(|V| - 1) + 1 = 2|V| - 1 > 2|V| - 2 = 2(|V| - 1) = 2|E| = \sum_{v \in V} \delta(v)$$

(där vi använt att $|E| = |V| - 1$ i ett träd med minst ett hörn och att $2|E| = \sum_{v \in V} \delta(v)$ i varje graf).

Motsägelse, så **saken är klar**.

11) (4p) $\sigma, \tau \in S_7$ är $\sigma = (1\,5)(2\,4\,6\,3)$, $\tau = (1\,6\,4\,5\,7\,3\,2)$. Vi söker alla $\pi \in S_7$ med $\pi\sigma\pi = \tau$.

Lösning:

$$\pi\sigma\pi = \tau \Leftrightarrow (\pi\sigma)^2 = \pi\sigma\pi\sigma = \tau\sigma = (1\,6\,4\,5\,7\,3\,2)(1\,5)(2\,4\,6\,3) = (1\,7\,3)(2\,5\,6)(4).$$

3-cyklerna kan fås som kvadrater av 3-cykler, eller båda från kvadraten av en 6-cykel (flera möjliga). 1-cykeln måste komma från en 1-cykel i $\pi\sigma$.

Man finner de olika möjliga $\pi\sigma$: $(1\,3\,7)(2\,6\,5)$, $(1\,2\,7\,5\,3\,6)$, $(1\,5\,7\,6\,3\,2)$, $(1\,6\,7\,2\,3\,5)$, som ger $\pi = (\pi\sigma)\sigma^{-1} = (\pi\sigma)(1\,5)(2\,3\,6\,4) = (1\,2\,7)(3\,5)(4\,6)$, $(1\,3)(2\,6\,4\,7\,5)$, $(1\,7\,6\,4)$, $(2\,5\,6\,4\,3\,7)$.

Svar: Alla lösningar är $\pi = (1\,2\,7)(3\,5)(4\,6)$, $(1\,3)(2\,6\,4\,7\,5)$, $(1\,7\,6\,4)$, $(2\,5\,6\,4\,3\,7)$.

12) (5p) K_{17} :s kanter har färgats med tre färger. Vi visar att det finns en enfärgad triangel.

Lösning:

Som i exemplet i Biggs 10.1, men "ett steg till".

Välj ett hörn, v_0 säg. Bland dess 16 kanter måste minst 6 ha samma färg, f_0 säg ("generaliserade postfacksprincipen", Biggs 10.1). Låt V' vara mängden av v_0 :s "f₀-grannar". Om någon kant inom V' har färg f_0 ger den med två kanter till v_0 en enfärgad triangel. Annars, tag ett hörn v_1 i V' , det har minst 5 grannar i V' och alla kanter till dessa har en av två färger. Det finns alltså minst tre kanter (inom V') från v_1 med samma färg, f_1 säg. Låt V'' vara mängden av v_1 :s "f₁-grannar" i V' . Om någon kant inom V'' har färg f_1 ger den med två kanter till v_1 en enfärgad triangel, annars har alla kanter inom V'' samma färg, men $|V''| \geq 3$, så i alla fallen finns en enfärgad triangel. **Saken är klar.**

13) Vi skall visa att $x^n = \sum_{k=1}^n S(n, k)(x)_k$ för (a, 1p) $n = 1, 2, 3$ och (b, 4p) alla $n = 1, 2, \dots$
($(x)_k = x(x-1)\dots(x-k+1)$)

Lösning:

Vi gör uppgift b. a följer förstås.

Alternativ 1, med induktion:

Bas: för $n = 1$ blir VL= x och HL= $\sum_{k=1}^1 S(1, k)(x)_1 = S(1, 1)(x)_1 = 1 \cdot x = x$ Ok.

Steg: antag att påståendet gäller för $n = p$, då fås VL $_{p+1} = x^{p+1} = x \cdot x^p \stackrel{\text{ind.ant.}}{=} x \cdot \sum_{k=1}^p S(p, k)(x)_k = \sum_{k=1}^p S(p, k)x(x)_k = \sum_{k=1}^p S(p, k)(x-k+k)(x)_k = \sum_{k=1}^p S(p, k)(x)_{k+1} + \sum_{k=1}^p kS(p, k)(x)_k = \sum_{k=2}^{p+1} S(p, k-1)(x)_k + \sum_{k=1}^p kS(p, k)(x)_k = 1 \cdot S(p, 1)(x)_1 + \sum_{k=2}^p (S(p, k-1) + kS(p, k))(x)_k + S(p, p)(x)_{p+1} = 1 \cdot S(p+1, 1)(x)_1 + \sum_{k=2}^p (S(p+1, k))(x)_k + S(p+1, p+1)(x)_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} S(p+1, k)(x)_k = \text{HL}_{p+1}$, där vi använt rekursionsformeln för $S(n, k)$ och att $S(n, 1) = S(n, n) = 1$.

Påståendet följer enligt induktionsprincipen.

Alternativ 2, med kombinatorik:

Eftersom båda leden är polynom av grad n (högst?), räcker det att visa att de är lika för alla naturliga tal, $x = m$, säg. (Ty VL - HL blir ett polynom av grad högst n , med ett oändligt antal nollställen, således identiskt 0.)

Då är VL = m^n = antalet funktioner från en n -mängd till en m -mängd. Termen $S(n, k)(m)_k$ i HL ger antalet sådana funktioner som antar precis k värden ($S(n, k)$ ger antalet sätt att dela upp n -mängden efter vilka som avbildas på samma och $(m)_k$ antalet sätt att tilldela dessa k olika värden). Tydligt blir VL = HL.
