

Matematik, KTH
B.Ek

Tentamen TENA i kurs
SF1630(/SF1631), DISKRET MATEMATIK för D, F
torsdagen den 8 januari 2015, klockan 8.00–13.00.

Examinator: Bengt Ek, tel 790 6951.

Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Maximal poäng på de olika delarna är T: 12p, P1: 12p, P2: 12p, P3: 10p.

För **godkänt** krävs minst 9p på var och en av delarna T och P1.

För betyg A–E krävs **dels** godkänt och **dels** poäng enligt:

För betyg	A	B	C	D	E	
krävs totalt	37	32	-	25	-	poäng
varav	-	12	8	-	-	på delarna P2 och P3 tillsammans
och	5	-	-	-	-	på del P3

Omdömet FX, dvs rätt att komplettera för betyg E, ges för skrivning som inte är godkänd, men nått minst 18p totalt.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.

Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL T

Godkänd uppgift 1 på lsiA ht14 ger automatiskt full poäng på uppgift i ($i = 1, 2, 3$) och det ger då ingen ytterligare poäng att lösa den uppgiften på skrivningen.

- 1a) (1p) Hur definieras att graferna $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ är **isomorfa**?
- b) (1p) Vad menas med en **hamiltoncykel** i en graf $G = (V, E)$?
- c) (1p) Formulera **Halls sats** om fullständig matchning (av X -hörnen) i en bipartit graf (ä.k. giftermålsatsen).

- 2a) (1p) Hur definieras att en funktion $f : X \rightarrow Y$ är en **bijektion**?
- b) (1p) Hur definieras att en mängd X är **överuppräknelig** (eng. uncountable)?
- c) (1p) Formulera **postfacksprincipen** (eng. pigeonhole principle).

- 3a) (1p) Hur definieras att en binär relation $\mathcal{R}$ är **transitiv**?
- b) (1p) Hur många **bjektioner** $f : X \rightarrow Y$ finns det då $|X| = m$, $|Y| = n$?
- c) (1p) Formulera **principen om inklusion och exklusion** (eng. sieve principle) för tre mängder A , B , C .

- 4a) (1p) Hur definieras **Eulers ϕ -funktion**? (Dvs vad är $\phi(n)$ för $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$?)
 - b) (1p) Vad är en **permutation** av en mängd X (t.ex. $\{1, 2, \dots, n\}$)?
 - c) (1p) Hur definieras att en permutation $\pi \in S_n$ är **jämn**?
-

Vänd!

DEL P1

Godkänd uppgift 2 på lsiA ht14 ger automatiskt full poäng på uppgift 4 + i ($i = 1, 2, 3$) och det ger då ingen ytterligare poäng att lösa den uppgiften på skrivningen.

5) (3p) Om $G = (V, E)$ är en reguljär, sammanhängande och plan graf, sådan att $|V|$, antalet hörn (eng. vertices), är lika med antalet områden G delar in planet i, vilka värden är möjliga för antalet områden ($= |V|$)?

Ge för de möjliga värdena exempel på sådana grafer och förklara varför andra värden inte är möjliga.

6) (3p) Finn alla $x, y \in \mathbb{Z}$ som uppfyller

$$91x + 133y = 686.$$

7) (3p) På hur många sätt kan 11 bullar med saffran och 25 bullar utan saffran fördelas bland 16 (särskiljbara) barn, om varje barn skall få minst en bulle (oavsett sort) och inget skall få mer än en saffransbulle? Bullar med och utan saffran ses som inbördes identiska (men inte med den andra sorten).

Svaret får innehålla heltal, fakulteter, potenser och de fyra enkla räknesätten.

8) (3p) Hur många olika udda permutationer, sådana att inga två av dem är konjugerade, finns det i S_7 ? (Dvs, finn det största $n \in \mathbb{N}$ sådant att det finns $\pi_1, \dots, \pi_n \in S_7$ med alla π_i udda permutationer och inga π_i och π_j konjugerade för $i \neq j$.)

DEL P2

9) (4p) Finn alla $x \in \mathbb{Z}$ som uppfyller

$$x \equiv 21^{41} \pmod{11} \quad \text{och} \quad x \equiv 51^{61} \pmod{31}.$$

10) (4p) Visa att ett träd $T = (V, E)$ med minst två hörn (eng. vertices), dvs $|V| \geq 2$, har minst två hörn med valens (eng. degree) ett.

11) (4p) Låt $\sigma, \tau \in S_7$ ges (på cykelform) av $\sigma = (1\ 5)(2\ 4\ 6\ 3)$, $\tau = (1\ 6\ 4\ 5\ 7\ 3\ 2)$. Finn (på cykelform) alla $\pi \in S_7$ som uppfyller

$$\pi\sigma\pi = \tau.$$

DEL P3

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

12) (5p) Varje kant i K_{17} , den fullständiga (eng. complete) grafen med 17 hörn, ges en av tre färger. Visa att det finns en enfärgad triangel, dvs tre hörn vars tre inbördes kanter alla har samma färg.

13) Betrakta påståendet $x^n = \sum_{k=1}^n S(n, k)(x)_k$

(där $(x)_k = x(x-1)\dots(x-k+1)$ och $S(n, k)$ är stirlingtalen (av andra slaget)).

a) (1p) Visa påståendet för $n = 1, 2, 3$.

b) (4p) Visa påståendet för alla $n = 1, 2, \dots$

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.