

**Lösningar tentan TEN1 SF1631(/SF1630) DISKRET MATEMATIK, D3 m.fl.,
8 januari 2015**

Tryckfel kan förekomma.

1) (4p) Vi söker möjliga värden för $|V|$ då grafen $G = (V, E)$ är reguljär, sammanhängande och plan och $|V|$ är lika med antalet områden G delar in planet i.

Lösning: Eftersom G är sammanhängande och plan (och $v > 0$) är (med vanliga beteckningar) $v - e + r = 2$ (Eulers polyederformel). Med $v = r$ ger det $2v - e = 2$.

I en graf gäller alltid $\sum_{x \in V} \delta(x) = 2e$, så om G är d -reguljär är $v \cdot d = 2e$, så $e = \frac{d}{2}v$.

Det ger $2v - \frac{d}{2}v = 2$, så $(4 - d)v = 4$. $4 - d \mid 4$ så $4 - d = 1, 2, 4$:

- $4 - d = 1$, $d = 3$ ger $v = 4 = r$, $e = 6$, grafen K_4 ,
- $4 - d = 2$, $d = 2$ ger $v = r = 2 = e$, 2 hörn, dubbla kanter mellan (inte en enkel graf),
- $4 - d = 4$, $d = 0$ ger $v = r = 1$, $e = 0$, grafen med ett hörn och inga kanter.

Svar: Möjliga antal områden är 1 och 4 (och, med G icke-enkel, 2).

2) (4p) Vi söker alla $x, y \in \mathbb{Z}$ med $91x + 133y = 686$.

Lösning: Eftersom $133 = 1 \cdot 91 + 42$, $91 = 2 \cdot 42 + 7$, $42 = 6 \cdot 7 + 0$, är enligt Euklides $\text{sgd}(91, 133) = 7$ och ekvationen ekvivalent med (dividera med 7) $13x + 19y = 98$.

$7 = 91 - 2 \cdot 42 = 91 - 2 \cdot (133 - 91) = -2 \cdot 133 + 3 \cdot 91$ ger (dividera med 7) $1 = -2 \cdot 19 + 3 \cdot 13$, så (multiplicera med 98) $13 \cdot 294 + 19(-196)$.

(x, y) löser då $13x + 19y = 98$ omm (subtrahera ledvis) $13(x - 294) = -19(y + 196)$ och alla lösningar ges av $x = 294 + 19n$, $y = -196 - 13n$, $n \in \mathbb{Z}$ (ty $\text{sgd}(13, 19) = 1$ etc.). $n = k - 15$ ger en trevligare form: $x = 9 + 19k$, $y = -1 - 13k$, $k \in \mathbb{Z}$.

(Alternativt: ("Eulers metod") $91x + 133y = 686 \Leftrightarrow x = 7 - y + \frac{49-42y}{91}$. Låt $z = \frac{49-42y}{91} (\in \mathbb{Z})$, så $42y + 91z = 49$ och $y = 1 - 2z + \frac{7-7z}{42}$. Låt nu $m = \frac{7-7z}{42} (\in \mathbb{Z})$, så $42m + 7z = 7$ och $z = 1 - 6m$. Insättning ger $y = 1 - 2(1 - 6m) + m = -1 + 13m$, $x = 7 - (-1 + 13m) + (1 - 6m) = 9 - 19m$, $m \in \mathbb{Z}$. Samma lösningar igen.)

Svar: Alla lösningar ges av $\begin{cases} x = 9 + 19k, \\ y = -1 - 13k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$

3) (4p) Vi söker antalet fördelningar av 11 saffransbullar och 25 andra bullar (inbördes identiska) bland 16 (särskiljbara) barn, så att varje barn får minst en bulle, varav högst en saffransbulle.

Lösning: Saffransbullarna kan fördelas på $\binom{16}{11} = \frac{16!}{11! \cdot 5!}$ (ta ut de barn som får en).

Övriga 5 barn får varsin bulle och sedan återstår att fördela 20 bullar bland de 16 barnen, vilket kan göras på $\binom{20+15}{15} = \frac{35!}{15! \cdot 20!}$ sätt (välj 15 väggar bland bullväggarna).

Enligt multiplikationsprincipen är det sökta antalet fördelningar $\binom{16}{11} \cdot \binom{35}{15} = \frac{16 \cdot 35!}{11! \cdot 5! \cdot 20!}$.

Svar: Det finns $\frac{16 \cdot 35!}{11! \cdot 5! \cdot 20!} (= 14\,187\,015\,722\,880)$ sådana fördelningar.

4) (4p) $f_{a,b} : \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_3$ definieras av $f_{a,b}(x) = ax + b$. Vi skall visa att $\{f_{a,b} ; a, b \in \mathbb{Z}_3, a \neq 0\}$, med operationen sammansättning av funktioner, är en grupp och att den är isomorf med S_3 , gruppen av permutationer av tre element.

Lösning: De givna funktionerna verkar som permutationer av de tre elementen i $\mathbb{Z}_3$, enligt $f_{1,0} : (0)$, $f_{1,1} : (0\ 1\ 2)$, $f_{1,2} : (0\ 2\ 1)$, $f_{2,0} : (1\ 2)$, $f_{2,1} : (0\ 1)$, $f_{2,2} : (0\ 2)$.

(T.ex. $f_{2,1}(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$, $f_{2,1}(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 0$, $f_{2,1}(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 2$.)

Eftersom operationen i S_3 också är sammansättning av funktioner blir den givna mängden isomorf med S_3 och eftersom S_3 är en grupp, är den givna också det. **Saken är klar.**

(Gruppegenskaperna slutenhet, associativitet, identitet och invers kan också verifieras direkt.)

5) (4p) Vi söker alla moniska irreducibla polynom i $\mathbb{Z}_5[x]$ som delar både $p(x) = x^6 + 4x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1$ och $q(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + x^2 + 4x + 3$.

Lösning: De sökta polynomen är precis de moniska irreducibla faktorerna i $\text{sgd}(p(x), q(x))$.

Division i $\mathbb{Z}_5[x]$ ger: $p(x) = (x+2) \cdot q(x) + r_1(x)$, $r_1(x) = 4x^4 + 4x^3 + x$,

$q(x) = (4x+4) \cdot r_1(x) + r_2(x)$, $r_2(x) = 2x^3 + 2x^2 + 3$,

$r_1(x) = 2x \cdot r_2(x) + 0$.

Så (moniska) $\text{sgd}(p(x), q(x)) = 3 \cdot r_2(x) = x^3 + x^2 + 4 = d(x)$.

Vi söker irreducibla faktorer i $d(x)$. $d(0) = 4$, $d(1) = 1$, $d(2) = 1$, $d(3) = 0$, så en (irreducibel) faktor är $x+2$. Division ger $d(x) = (x+2)(x^2+4x+2) = (x+2) \cdot e(x)$.

$e(3) = 3$, $e(4) = 4$, så $e(x)$ saknar nollställen och är alltså irreducibelt (andragradspolynom utan nollställen är irreducibla). Så $x+2$ och x^2+4x+2 är alla sådana faktorer.

Svar: De sökta polynomen är $x+2$ och x^2+4x+2 .

6) (5p) Vi visar att ett träd $T = (V, E)$ med $|V| \geq 2$, har minst två hörn med valens ett.

Lösning: Eftersom T är sammanhängande och $|V| \geq 2$ är $\delta(v) \geq 1$ för alla $v \in V$.

Antag (för motsägelse) att $\delta(v) \geq 2$ för alla v utom högst ett. Då är

$\sum_{v \in V} \delta(v) \geq 2(|V| - 1) + 1 = 2|V| - 1 > 2|V| - 2 = 2(|V| - 1) = 2|E| = \sum_{v \in V} \delta(v)$

(där vi använt att $|E| = |V| - 1$ i ett träd med minst ett hörn och att $2|E| = \sum_{v \in V} \delta(v)$ i varje graf).

Motsägelse, så **saken är klar**.

7) (5p) $\sigma, \tau \in S_7$ är $\sigma = (15)(2463)$, $\tau = (1645732)$. Vi söker alla $\pi \in S_7$ med $\pi\sigma\pi = \tau$.

Lösning: $\pi\sigma\pi = \tau \Leftrightarrow (\pi\sigma)^2 = \pi\sigma\pi\sigma = \tau\sigma = (1645732)(15)(2463) = (173)(256)(4)$.

3-cyklerna kan fås som kvadrater av 3-cykler, eller båda från kvadraten av en 6-cykel (flera möjliga). 1-cykeln måste komma från en 1-cykel i $\pi\sigma$.

Man finner de olika möjliga $\pi\sigma$: $(137)(265)$, (127536) , (157632) , (167235) , som ger $\pi = (\pi\sigma)\sigma^{-1} = (\pi\sigma)(15)(2364) = (127)(35)(46)$, $(13)(26475)$, (1764) , (256437) .

Svar: Alla lösningar är $\pi = (127)(35)(46)$, $(13)(26475)$, (1764) , (256437) .

8) (5p) Vi söker alla $x \in \mathbb{Z}$ med $x \equiv 21^{41} \pmod{11}$ och $x \equiv 51^{61} \pmod{31}$.

Lösning: 11 är primtal och $\text{sgd}(21, 11) = 1$, så $21^{10} \equiv_{11} 1$ (Fermat) och $21^{41} \equiv_{11} 1^4 \cdot 21 \equiv_{11} 10$.

P.s.s. fås $51^{30} \equiv_{31} 1$ och $51^{61} \equiv_{31} 1^2 \cdot 51 \equiv_{31} 20$.

Den första ger att $x = 10 + 11t$ för något $t \in \mathbb{Z}$. Vilka t som är möjliga bestäms av den andra,

$10 + 11t \equiv_{31} 20 \Leftrightarrow 11t \equiv_{31} 10 \Leftrightarrow (\text{sgd}(3, 31) = 1, \text{ så } 3 \text{ inverterbart}) \quad 2t \equiv_{31} 33t \equiv_{31} 30 = 2 \cdot 15 \Leftrightarrow$

$(\text{sgd}(2, 31) = 1, \text{ så } 2 \text{ inverterbart}) \quad t \equiv_{31} 15$, så $t = 15 + 31k$, k godtyckligt heltal.

Det ger $x = 10 + 11(15 + 31k) = 175 + 341k$

Svar: Alla lösningar ges av $x = 175 + 341k$, k godtyckligt heltal.

(Man kan förstås också få x som i stencilen om kinesiska restsatsen.)

9) (6p) Vi söker antalet väsentligt olika färgningar av en kvadratisk bricka med identisk över- och undersida med var och en av de fyra kanterna vit eller svart och vart och ett av de fyra hörnen grönt eller rött.

Lösning: Vi använder Burnsidess lemma (Thm 21.4 i Biggs). Symmetrigruppen G har åtta element och är isomorf med $G_{\square}$, kvadratens symmetrigrupp. Med beteckningar från $G_{\square}$ har vi identiteten i , rotationer r, r^2, r^3 kring en axel vinkelrät mot brickan, rotationer x, xr^2 kring axlar parallella med kvadratens sidor och xr, xr^3 kring axlar längs diagonalerna. $|F(g)|$, antalet konfigurationer som inte ändras av g för de olika $g \in G$ blir:

g	antal element	$ F(g) $
i	1	$2^8 = 256$ (alla hörn, kanter godtyckligt färgade)
r, r^3	2	$2^2 = 4$ (alla hörn samma, alla kanter samma färg)
r^2	1	$2^4 = 16$ (hörnena parvis, kanterna parvis samma färg)
x, xr^2	2	$2^5 = 32$ (hörnena parvis, ett par kanter samma färg)
xr, xr^3	2	$2^5 = 32$ (ett par hörn, kanterna parvis samma färg)

Så antalet olika bricker = antalet banor under G 's verkan =
 $= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)| = \frac{1}{8} (1 \cdot 256 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 16 + 2 \cdot 32 + 2 \cdot 32) = \frac{1}{8} \cdot 408 = 51.$

Svar: Man kan få 51 olika sådana bricker.

10) Vi skall visa att $x^n = \sum_{k=1}^n S(n, k)(x)_k$ för (a, 1p) $n = 1, 2, 3$ och (b, 5p) alla $n = 1, 2, \dots$
 $((x)_k = x(x-1) \dots (x-k+1))$

Lösning: Vi gör uppgift b. a följer förstås.

Alternativ 1, med induktion:

Bas: för $n = 1$ blir VL= x och HL= $\sum_{k=1}^1 S(1, k)(x)_k = S(1, 1)(x)_1 = 1 \cdot x = x$ Ok.
 Steg: antag att påståendet gäller för $n = p$, då fås VL $_{p+1} = x^{p+1} \stackrel{\text{ind. ant.}}{=} x \cdot \sum_{k=1}^p S(p, k)(x)_k = \sum_{k=1}^p S(p, k)x(x)_k = \sum_{k=1}^p S(p, k)(x-k+k)(x)_k = \sum_{k=1}^p S(p, k)(x)_{k+1} + \sum_{k=1}^p kS(p, k)(x)_k = \sum_{k=2}^{p+1} S(p, k-1)(x)_k + \sum_{k=1}^p kS(p, k)(x)_k = 1 \cdot S(p, 1)(x)_1 + \sum_{k=2}^p (S(p, k-1) + kS(p, k))(x)_k + S(p, p)(x)_{p+1} = 1 \cdot S(p+1, 1)(x)_1 + \sum_{k=2}^p (S(p+1, k))(x)_k + S(p+1, p+1)(x)_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} (S(p+1, k))(x)_k = \text{HL}_{p+1}$, där vi använt rekursionsformeln för $S(n, k)$ och att $S(n, 1) = S(n, n) = 1$.

Påståendet följer enligt induktionsprincipen.

Alternativ 2, med kombinatorik:

Eftersom båda leden är polynom av grad n (högst?), räcker det att visa att de är lika för alla naturliga tal, $x = m$, säg. (Ty VL - HL blir ett polynom av grad högst n , med ett oändligt antal nollställen, således identiskt 0.)

Då är VL = m^n = antalet funktioner från en n -mängd till en m -mängd. Termen $S(n, k)(m)_k$ i HL ger antalet sådana funktioner som antar precis k värden ($S(n, k)$ ger antalet sätt att dela upp n -mängden efter vilka som avbildas på samma och $(m)_k$ antalet sätt att tilldela dessa k olika värden). Tydligen blir VL = HL.