

**Lösningar tentan TEN1 SF1631(/SF1630) DISKRET MATEMATIK, D3 m.fl.,
9 april 2015**

Tryckfel kan förekomma.

1) (4p) En plan, sammanhängande graf $G = (V, E)$ delar in planet i 18 områden. De 17 begränsade områdena har alla 4 kanter, medan det yttre, obegränsade, området har 12 kanter. Vi söker antalet hörn i G .

Lösning: Låt som vanligt v vara antalet hörn, e antalet kanter och $r (= 18)$ antalet områden i grafen. Enligt Euler är $v - e + r = 2$ (plan, sammanhängande graf), så det sökta $v = e - r + 2 = e - 16$.

Då man lägger ihop antalen kanter i alla områden räknar man varje kant precis två gånger, så $17 \cdot 4 + 1 \cdot 12 = 2e$, dvs $e = 40$ och $v = e - 16 = 24$.

Svar: Grafen har 24 hörn.

2) (4p) Vi söker alla heltal x så att $12x + 13 \equiv 10 \pmod{51}$.

Lösning: $12x + 13 \equiv 10 \pmod{51} \Leftrightarrow 12x \equiv -3 \equiv 48 \pmod{51} \Leftrightarrow 4x \equiv 16 \pmod{17}$ (det sista eftersom $12x - 48 = 51k \Leftrightarrow 4x - 16 = 17k$). Eftersom $4 \cdot 13 = 52 \equiv 1 \pmod{17}$ (kan äv. fås med Euklides algoritim) och $\text{sgd}(13, 17) = 1$ är ekvationen $\Leftrightarrow 13 \cdot 4x \equiv x \equiv 13 \cdot 16 \equiv -13 \equiv 4 \pmod{17}$.

Svar: Alla sådana x är $x = 4 + 17k$, $k \in \mathbb{Z}$.

3) (4p) 72 (identiska) kakor skall fördelas bland 17 (särskiljbara) barn, så att minst ett barn får ett udda antal kakor. På hur många sätt kan det ske?

Lösning: Det sökta antalet är antalet sätt att fördela kakorna minus antalet sätt att göra det så att alla barn får ett jämnt antal.

Det handlar om ordnat val med upprepning (utse väggar bland kakväggarna, i det senare fallet gäller det kakpar). Det blir $\binom{72+16}{16} - \binom{\frac{72}{2}+16}{16} = \frac{88!}{16! \cdot 72!} - \frac{52!}{16! \cdot 36!}$.

Svar: Det sökta antalet är $\frac{88!}{16! \cdot 72!} - \frac{52!}{16! \cdot 36!} (= 144\,762\,711\,920\,208\,400)$.

4) (4p) Vi söker minsta möjliga $|G|$ då G har en delgrupp H med $|H| = 51$ och ett $g \in G$ med $o(g) = 39$. Vi söker också exempel på sådana minimerande G, H, g .

Lösning: Ordningen för en delgrupp och för ett element i en ändlig grupp är delare till gruppens ordning, så det måste gälla att $51 \mid |G|$ och $39 \mid |G|$. $|G|$ (som ju är ≥ 1) måste alltså vara minst $\text{mgm}(51, 39) = \text{mgm}(3 \cdot 17, 3 \cdot 13) = 3 \cdot 13 \cdot 17 = 663$.

Exemplet $(G, *) = (\mathbb{Z}_{663}, +)$, $H = \langle 13 \rangle = \{0, 13, 26, \dots, 650\}$ och $g = 17 (= \frac{663}{39})$ visar att 663 också är ett möjligt värde.

Svar: $(G, *) = (\mathbb{Z}_{663}, +)$, $H = \langle 13 \rangle$, $g = 17$ ger det minimala värdet $|G| = 663$.

5) (4p) Vi skall faktorisera $p(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$ i irreducibla faktorer.

Lösning: Vi börjar med att söka förstgradsfaktorer, vilket enligt faktorsatsen är ekvivalent med att finna nollställena till p . Man finner att $p(1) = 0$, så $x - 1 = x + 2$ är en faktor i $p(x)$. Polynomdivision ger att $p(x) = (x+2)q(x)$, där $q(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1$. Det gäller nu att faktorisera $q(x)$. Man finner att också $q(1) = 0$ och polynomdivision ger $q(x) = (x+2)r(x)$, där $r(x) = x^3 + x + 2$. Vidare $r(2) = 0$, så $r(x)$ är delbart med $x - 2 = x + 1$. Polynomdivision igen ger $r(x) = (x+1)s(x)$, där $s(x) = x^2 + 2x + 2$. Eftersom andragradspolynomet $s(x)$ saknar nollställena i $\mathbb{Z}_3$ saknar det förstgradsfaktorer och är alltså irreducibelt.

Svar: Den sökta faktoriseringen är : $p(x) = (x+2)^2(x+1)(x^2+2x+2)$.

6) Vi söker antalet kvadrater i dels (a, 1p) $\mathbb{Z}_{13}$ och dels (b, 4p) $\mathbb{Z}_p$, då p är ett udda primtal.

Lösning: I $\mathbb{Z}_{13}$ finner vi $0^2 = 0, 1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9, 4^2 = 3, 5^2 = 12, 6^2 = 10, 7^2 = 10, 8^2 = 12, 9^2 = 3, 10^2 = 9, 11^2 = 4, 12^2 = 1$, så kvadraterna är 0, 1, 3, 4, 9, 10, 12, dvs 7 stycken.

I $\mathbb{Z}_p$, p udda primtal, gäller att $x^2 = y^2$ precis om $p \mid x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, så (p primtal) precis om minst en av $p \mid x+y$ och $p \mid x-y$, så precis om $(0 \leq x, y \leq p-1) \ x+y = 0, \ x+y = p$ eller $x-y = 0$. Enda möjligheterna är alltså $y = p-x$ och $y = x$, så alla $x = 0, 1, \dots, \frac{p-1}{2}$ ger olika kvadrater, men övriga ger upprepningar (som för $\mathbb{Z}_{13}$). Det sökta antalet är alltså $1 + \frac{p-1}{2} = \frac{p+1}{2}$.

Svar a: $\mathbb{Z}_{13}$ har 7 kvadrater, **b:** $\mathbb{Z}_p$, p udda primtal, har $\frac{p+1}{2}$ stycken.

7) Vi har $\alpha(1)=\beta(5)=2, \alpha(2)=\beta(6)=3, \alpha(3)=\beta(3)=1, \alpha(4)=\beta(8)=5, \alpha(5)=\beta(9)=6, \alpha(6)=\beta(7)=7, \alpha(7)=\beta(1)=4, \alpha(8)=\beta(4)=9, \alpha(9)=\beta(2)=8$ och (a, 2p) söker α, β och $\alpha\beta$ på cykelform och skall (b, 3p) visa att om gruppen G innehåller α och β måste G 's ordning vara delbar med 180.

Lösning: $\alpha(1) = 2, \alpha(2) = 3, \alpha(3) = 1$ ger en cykel (123) för α . P.s.s. finner man $\alpha = (123)(4567)(89)$ och $\beta = (14963)(285)$. Sammansättning (först β sedan α) ger $(\alpha\beta)(1)=\alpha(\beta(1))=\alpha(4)=5$ osv, så $\alpha\beta = (153297486)$.

G är en grupp som innehåller α och β och således också $\alpha\beta$. Ordningen för en grupp är en multipel av ordningen för varje element (följer ur Lagranges sats) och ordningen för en permutation är det minsta positiva heltalet som är en multipel av cykellängderna, dvs deras minsta gemensamma multipel. Vi ser att ordningarna för $\alpha, \beta, \alpha\beta$ är $\text{mgm}(3,4,2) = 12, \text{mgm}(5,3,1) = 15, \text{mgm}(9) = 9$. $|G|$ är delbar med alla tre, dvs med $\text{mgm}(12,15,9) = 180$.

Saken är klar.

Svar a: $\alpha = (123)(4567)(89), \beta = (14963)(285), \alpha\beta = (153297486)$,
b: Visat ovan.

8) Vi har ringen $R = \mathbb{Z}_5[x]/(f(x))$, där $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3$.

Vi kallar x 's ekvivalensklass för α och skall (a, 1p) finna antalet element i R , (b, 2p) beräkna $(\alpha^2 + 3\alpha + 2)(3\alpha^2 + 4)$ i R och (c, 2p) finna nolldelare i R .

Lösning: a. I varje ekvivalensklass (mod $f(x)$) finns precis ett polynom av grad ≤ 2 . Det kan representera sin klass, dvs sitt element i R , och varje element i R kan då skrivas som $c_2\alpha^2 + c_1\alpha + c_0$, alla $c_i \in \mathbb{Z}_5$. Det totala antalet element, $|R|$, är antalet sätt att välja c_i 'na, dvs $5^3 = 125$.

b. Eftersom $x^3 + 3x^2 + 3 \equiv_{(f(x))} 0$ är $\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3 = 0$, så $\alpha^3 = 2\alpha^2 + 2$ i R .

Det ger $(\alpha^2 + 3\alpha + 2)(3\alpha^2 + 4) = 3\alpha^4 + 4\alpha^3 + 2\alpha + 3 = 3\alpha \cdot (2\alpha^2 + 2) + 4\alpha^3 + 2\alpha + 3 = 3\alpha + 3$.

c. $r \cdot s = 0, r, s \neq 0$ i R , betyder precis att r och s svarar mot polynom $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ med $f(x) \mid g(x) \cdot h(x), f(x) \nmid g(x), f(x) \nmid h(x)$. Sådana $g(x), h(x)$ finns omm $f(x)$ är reducibelt. Man finner $f(0) = 3, f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 2, f(4) = 0$, så $(x-4) = (x+1) \mid f(x)$. Polynomdivision ger $f(x) = (x+1)(x^2 + 2x + 3)$ i $\mathbb{Z}_5[x]$, så $(\alpha+1)(\alpha^2 + 2\alpha + 3) = 0$ i R .

Svar a: $|R| = 125$, **b:** $3\alpha + 3$, **c:** Nolldelare är (t.ex.) $\alpha + 1$ och $\alpha^2 + 2\alpha + 3$.

9) (6p) En kub skall få en enfärgad kula i varje hörn. Vi söker antalet väsentligt olika sätt det kan ske om man skall använda precis två röda och två blå kulor och godtyckliga antal kulor med k andra färger.

Lösning: Vi använder Burnsidess lemma (Thm 21.4 i Biggs). Symmetrigruppen G har 24 element ($|Gx|/|G_x| = 8 \cdot 3 = 24$ om x är ett av kubens hörn):

identitets"rotationen" id ,

8 rotationer $\frac{2\pi}{3}$ kring axlar genom motsatta hörn rot_{hh} ,

6 rotationer π kring axlar genom mittpunkter av motsatta kanter rot_{kk} ,

3 rotationer π kring axlar genom mittpunkter av motsatta sidor $rot_{ss\pi}$ och

6 rotationer $\frac{\pi}{2}$ kring axlar genom mittpunkter av motsatta sidor $rot_{ss\frac{\pi}{2}}$.

$|F(g)|$, antalet konfigurationer som inte ändras av g för de olika $g \in G$ blir:

g	antal element	$ F(g) $
id	1	$\binom{8}{2}\binom{6}{2}k^4 = 28 \cdot 15 \cdot k^4$ (vilka röda? vilka blå? övriga: k^4)
rot_{hh}	8	0 (kulorna samma färg 1,3,3,1, går inte)
rot_{kk}	6	$4 \cdot 3 \cdot k^2$ (kulorna samma färg parvis, vilket par rött? vilket blått?)
$rot_{ss\pi}$	3	$4 \cdot 3 \cdot k^2$ (kulorna samma färg parvis, som förra)
$rot_{ss\frac{\pi}{2}}$	6	0 (kulorna samma färg 4 och 4, går inte)

Så antalet olika utsmyckningar = antalet banor under G 's verkan på färgningarna =
 $= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)| = \frac{1}{24}(1 \cdot 28 \cdot 15 \cdot k^4 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot k^2 + 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot k^2 + 6 \cdot 0) = \frac{1}{2}(35k^4 + 9k^2)$.

Svar: Det finns $\frac{1}{2}(35k^4 + 9k^2)$ olika sådana utsmyckningar.

10) $(G, \cdot) = (U(\mathbb{Z}_{589}), \cdot)$ och vi söker (a, 1p) G 's ordning, (b, 2p) den maximala ordningen för element i G och (c, 3p) antalet element i G som har den maximala ordningen.

Lösning: a. $|G|$ = antalet inverterbara element i $\mathbb{Z}_{589} = \phi(589) = \phi(19 \cdot 31) = (19-1)(31-1) = 540$ (känd sats, nästan definitionen av Eulers funktion ϕ).

b. Enligt kinesiska restsatsen är $(\mathbb{Z}_{589}, \cdot) \approx (\mathbb{Z}_{19}, \cdot) \times (\mathbb{Z}_{31}, \cdot)$ (ty $\text{sgd}(19, 31) = 1$). Ett element i HL är inverterbart omm båda dess komponenter är det, så $(G, \cdot) \approx (U(\mathbb{Z}_{19}), \cdot) \times (U(\mathbb{Z}_{31}), \cdot)$. Eftersom 19 och 31 är primtal är grupperna i HL de multiplikativa grupperna i ändliga kroppar, så cykliska, av ordning 18 och 30. Om (x, y) är ett element i HL är $(x, y)^k = (1, 1)$ (identitetselementet i HL) omm $o(x) \mid k$ och $o(y) \mid k$, så $o((x, y)) = \text{mgm}(o(x), o(y))$. Dess största värde fås (bl.a.) då $o(x), o(y)$ är maximala, så den sökta maximala ordningen är $\text{mgm}(18, 30) = \text{mgm}(2 \cdot 3^2, 2 \cdot 3 \cdot 5) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$.

c. Enligt en känd sats finns det i en cyklisk grupp av ordning n precis $\phi(d)$ element av ordning d om $d \mid n$ och inga för andra d .

Enligt ovan är $o((x, y)) = \text{mgm}(o(x), o(y))$, så för $o((x, y)) = 90$ kan antingen $o(x) = 18$ och $o(y)$ vara en av 5, 10, 15, 30 eller $o(x) = 9$ och $o(y)$ vara 10 eller 30. Det ger det totala antalet element av ordning 90: $\phi(18) \cdot (\phi(5) + \phi(10) + \phi(15) + \phi(30)) + \phi(9) \cdot (\phi(10) + \phi(30)) = 6 \cdot (4 + 4 + 8 + 8) + 6 \cdot (4 + 8) = 216$.

Svar a: G 's ordning är 540, **b:** Elementens maximala ordning är 90,

c: 216 element har ordning 90.