

Matematik, KTH
B.Ek

Tentamen TEN1 (OBS!) i kursen
SF1631, DISKRET MATEMATIK för D3 m.fl.
torsdagen den 9 april 2015, klockan 8.00–13.00.

DENNA SKRIVNING KAN BARA SKRIVAS AV DEM SOM
FÖRSTAGÅNGSREGISTRERADES PÅ KURS SF1631
LÄSÅRET 2011–12 (eller betydligt tidigare)!

Examinator: Bengt Ek, tel 7906951 (under tentamen: Olof Heden, tel 790 6296).

Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Högsta möjliga poäng på skrivningen är 47p. Till den läggs bonus från lappskrivningar ht 2014, högst 12p.

Betygsgränser:

För betyg	A	B	C	D	E	
krävs	42	35	29	24	20	poäng (inklusive bonus)

17–19 p ger omdömet Fx, dvs rätt att delta i en komplettering för betyg E.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.
Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL I

1) (4p) Den plana och sammanhängande grafen $G = (V, E)$ delar in planet i 18 områden (ytor). De 17 begränsade områdena har alla precis 4 kanter, medan det yttre, obegränsade, området har precis 12 kanter.

Hur många hörn (noder) har grafen G ?

Det bör framgå av lösningen varför andra antal inte är möjliga.

2) (4p) Finn alla heltal x sådana att $12x + 13 \equiv 10 \pmod{51}$.

3) (4p) 72 (identiska) kakor skall fördelas bland 17 (särskiljbara) barn, så att minst ett barn får ett udda antal kakor. På hur många sätt kan det ske?

Svaret får innehålla heltal, faktulteter, potenser och de fyra enkla räknesätten.

4) (4p) Finn det minsta möjliga $|G|$, om gruppen G har en delgrupp H med $|H| = 51$ och ett $g \in G$ med ordning $o(g) = 39$ (dvs $g^{39} = 1$, $g^n \neq 1$ för $0 < n < 39$). Ge också exempel på sådana G , H , g som gör $|G|$ minimalt.

5) (4p) Faktorisera $p(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$ i irreducibla faktorer.

Vänd!

DEL II

6) (1p) Hur många kvadrater finns det i $\mathbb{Z}_{13}$, dvs hur många element i $\mathbb{Z}_{13}$ är x^2 för minst ett $x \in \mathbb{Z}_{13}$?

b) (4p) Hur många kvadrater finns det i $\mathbb{Z}_p$, då p är ett udda primtal?

Motivera ordentligt!

7) Permutationerna $\alpha, \beta \in S_9$ ges av

$\alpha(1)=\beta(5)=2, \alpha(2)=\beta(6)=3, \alpha(3)=\beta(3)=1, \alpha(4)=\beta(8)=5, \alpha(5)=\beta(9)=6,$

$\alpha(6)=\beta(7)=7, \alpha(7)=\beta(1)=4, \alpha(8)=\beta(4)=9, \alpha(9)=\beta(2)=8.$

a) (2p) Skriv α, β och $\alpha\beta$ på cykelform.

b) (3p) Låt G vara en delgrupp till S_9 som innehåller α och β .

Visa att $|G|$, antalet element i G , är delbart med 180.

8) Låt R vara ringen $\mathbb{Z}_5[x]/(f(x))$ (alla ekvivalensklasser i $\mathbb{Z}_5[x] \pmod{f(x)}$), där

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3.$$

x :s ekvivalensklass kallas α .

a) (1p) Hur många element har R ?

b) (2p) Vad är $(\alpha^2 + 3\alpha + 2)(3\alpha^2 + 4)$ i R (uttryckt i $1, \alpha, \alpha^2$, med koefficienter i $\mathbb{Z}_5$)?

c) (2p) Finn nolldelare i R , dvs $r, s \in R \setminus \{0\}$ med $r \cdot s = 0$.

DEL III

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

9) (6p) En kub skall smyckas med en enfärgad kula i varje hörn. På hur många väsentligt olika sätt (dvs så att de inte blir lika hur man än vrider kuben i rummet) kan det göras om det skall vara precis två röda och två blå kulor och godtyckliga antal kulor med k andra färger (dvs utöver rött och blått)?

10) Låt $(G, \cdot) = (U(\mathbb{Z}_{589}), \cdot)$, gruppen av inverterbara (under multiplikation) element i $\mathbb{Z}_{589}$. [589 = 19 · 31]

a) (1p) Finn G :s ordning, $|G|$.

b) (2p) Vilken är den maximala ordningen för element i G ?

c) (3p) Hur många element i G har den maximala ordningen?

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan nästa vecka.