

- 1a) (1p) Att en graf är **reguljär** betyder att alla hörn har samma valens.
 b) (1p) En graf $G = (V, E)$ är **bipartit** precis om $V = X \cup Y$, $X \cap Y = \emptyset$ och alla kanter består av ett X -hörn och ett Y -hörn.
 c) (1p) Det **kromatiska talet**, $\chi(G)$, för en graf $G = (V, E)$ är det minsta antalet färger som gör det möjligt att färga hörnen så att inga grannar har samma färg.

- 2a) (1p) Att en funktion $f : X \rightarrow Y$ är en **bijektion** betyder att för varje $y \in Y$ finns precis ett $x \in X$ med $y = f(x)$.
 b) (1p) Att en mängd X är **uppräknelig** betyder att det finns en bijektion $f : \mathbb{N} \rightarrow X$.
 c) (1p) **Postfacksprincipen** säger att om $|X| > |Y|$ finns ingen injektion $f : X \rightarrow Y$.
 (Flera alternativ möjliga, t.ex. "Om n brev ligger i n postfack finns minst ett fack med minst två brev".)

- 3a) (1p) **Binomialtalet** $\binom{n}{k}$ kan beräknas som $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ (rekursionsformeln godtas också).
 b) (1p) En binär relation $\mathcal{R}$ på en mängd X är **transitiv** precis om $(x\mathcal{R}y \text{ och } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$ för alla $x, y, z \in X$.
 c) (1p) **Stirlingtalet** (av andra slaget) $S(n, k)$ anger antalet olika partitioner av en n -mängd i precis k delar.

- 4a) (1p) En permutation π är en **transposition** precis om den innehåller en 2-cykel och i övrigt bara 1-cykler, dvs den skrivs på cykelform (ab) , där $a \neq b$.
 b) (1p) $\pi \in S_n$ är **udda** omm $n - c(\pi)$ är udda, där $c(\pi)$ är totala antalet cykler i π .
 c) (1p) Antalet permutationer i S_6 med cykelstruktur $[24]$ är $\binom{6}{2} \cdot 3! = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot 6 = 90$ (elementen i 2-cykeln kan väljas på $\binom{6}{2}$ sätt och övriga 6 element kan bilda en 4-cykel på 3! sätt).

- 5) (3p) Vi skall undersöka om grafen av hörn och kanter i en ikosaeder har en eulerkrets.

Lösning:

Nej, ty enligt en känd sats av Euler har en sammanhängande graf en eulerkrets omm alla valenser är jämna, men ikosaedergrafens hörn har alla valens 5, ett udda tal.

Svar: Nej, den har ingen eulerkrets.

- 6) Vi skall (a, 1p) avgöra vilken/vilka av 55, 65 och 75 som är inverterbar(a) i $\mathbb{Z}_{231}$ och (b, 2p) finna inversen till en av dem.

Lösning:

Enligt känd sats är $r \in \mathbb{Z}_m$ inverterbar omm $\text{sgd}(r, m) = 1$.

$55 = 5 \cdot 11$, $65 = 5 \cdot 13$, $75 = 3 \cdot 5^2$ och $231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$, så $\text{sgd}(55, 231)$, $\text{sgd}(75, 231) \neq 1$, men $\text{sgd}(65, 231) = 1$. 55 och 75 är alltså inte inverterbara, men det är 65.

För att finna 65^{-1} använder vi Euklides algoritm.

$$231 = 3 \cdot 65 + 36, \quad 65 = 1 \cdot 36 + 29, \quad 36 = 1 \cdot 29 + 7, \quad 29 = 4 \cdot 7 + 1.$$

$$\text{Det ger } 1 = 29 - 4 \cdot 7 = 29 - 4(36 - 29) = -4 \cdot 36 + 5 \cdot 29 = -4 \cdot 36 + 5(65 - 36) = 5 \cdot 65 - 9 \cdot 36 = 5 \cdot 65 - 9(231 - 3 \cdot 65) = -9 \cdot 231 + 32 \cdot 65, \text{ vilket ger } 65^{-1} = 32 \text{ i } \mathbb{Z}_{231}.$$

Svar a: Bara 65 är inverterbar, b: $65^{-1} = 32$ i $\mathbb{Z}_{231}$.

- 7) (3p) Vi söker antalet möjliga resultat i en omröstning om vackraste matematiska satser. Bland 30 kandidater väljs först 10 och bland dessa delas sedan en guld-, en silver- och en bronsmedalj ut till olika satser.

Lösning:

Antalet sätt att välja ut de 10 är $\binom{30}{10} = \frac{30!}{10! \cdot 20!}$ (oordnat val utan upprepning). Medaljerna kan sedan delas ut på $(10)_3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10!}{7!}$ sätt (ordnat val utan upprepning). Multiplikationsprincipen ger det totala antalet möjliga resultat: $\binom{30}{10} \cdot (10)_3 = \frac{30!}{10! \cdot 20!} \cdot \frac{10!}{7!} = \frac{30!}{20! \cdot 7!}$.

Svar: Det sökta antalet resultat är $\frac{30!}{20! \cdot 7!}$ (= 21 632 410 800).

8) Givet $\pi = (1\ 7)(2\ 9\ 4)(3\ 8\ 5\ 6) \in S_9$ och $\sigma = (1\ 4\ 8\ 5\ 6)(2\ 7)(3\ 9) \in S_9$, söker vi (a, 1p) π^{-1} , (b, 1p) $\pi\sigma$ (båda på cykelform) och π 's ordning, $o(\pi)$.

Lösning:

π^{-1} är π med cyklerna omvända, så $\pi^{-1} = (1\ 7)(2\ 4\ 9)(3\ 6\ 5\ 8)$.

$\pi\sigma = (1\ 7)(2\ 9\ 4)(3\ 8\ 5\ 6)(1\ 4\ 8\ 5\ 6)(2\ 7)(3\ 9) = (1\ 2)(3\ 4\ 5)(6\ 7\ 9\ 8)$.

$o(\pi) = \text{mgm}(2, 3, 4) = 3 \cdot 4 = 12$ (minsta gemensamma multipeln av cykellängderna).

Svar a: $\pi^{-1} = (1\ 7)(2\ 4\ 9)(3\ 6\ 5\ 8)$, b: $\pi\sigma = (1\ 2)(3\ 4\ 5)(6\ 7\ 9\ 8)$, c: $o(\pi) = 12$.

9) (4p) Vi söker antalet kanter i en plan sammanhängande graf som delar in planet i 34 ytor då 10 hörn har valens 3, 10 har valens 5 och alla andra hörn har valens 4.

Lösning:

Låt x vara antalet hörn med valens 4 och v, e, r (som vanligt) antalen hörn, kanter och ytor.

Enligt känd sats är $2e = \text{summan av valenserna} = 10 \cdot 3 + 10 \cdot 5 + x \cdot 4 = 80 + 4x$, så $e = 40 + 2x$.

Enligt Eulers polyederformel (plan, sammanhängande graf) är

$v - e + r = 20 + x - (40 + 2x) + 34 = 2$, vilket ger $x = 12$ och $e = 40 + 2x = 64$.

Svar: Grafen har 64 kanter, inga andra möjligheter.

10) (4p) Vi söker (minsta icke-negativa) resten då 13^{2595} divideras med 333.

Lösning:

$333 = 3^2 \cdot 37$, så $\phi(333) = 3 \cdot (3 - 1) \cdot 36 = 216$. Eftersom $\text{sgd}(13, 333) = 1$ är, enligt en sats av Euler, $13^{216} \equiv_{333} 1$.

$2595 = 216 \cdot 12 + 3$, så $13^{2595} = (13^{216})^{12} \cdot 13^3 \equiv_{333} 1^{12} \cdot 13^3 = 2197 \equiv_{333} 199$.

Svar: Den sökta resten är 199.

11) $\pi = (1\ 4)(2\ 6\ 3)(5\ 7) \in S_7$. Vi söker (a, 3p) antalet $\sigma \in S_7$ som kommuterar med π och (b, 1p) antalet av dem som är udda permutationer.

Lösning:

Låt $\Sigma = \{\sigma \in S_7 \mid \sigma\pi = \pi\sigma\}$. Då gäller $\sigma \in \Sigma \Leftrightarrow \sigma\pi\sigma^{-1} = \pi$,

dvs $\sigma\pi\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(4))(\sigma(2)\sigma(6)\sigma(3))(\sigma(5)\sigma(7)) = \pi = (1\ 4)(2\ 6\ 3)(5\ 7)$.

T.ex. cykeln $(\sigma(1)\sigma(4))$ måste vara en av 2-cyklerna i π , dvs $\sigma(1)$ har 4 möjligheter, $\sigma(4)$ måste vara det andra i samma cykel. Då kan $\sigma(5)$ vara ett av 2 element i den andra 2-cykeln och $\sigma(7)$ måste vara det andra. Totalt finns $4 \cdot 2 = 8$ möjligheter för $\sigma(1), \sigma(4), \sigma(5), \sigma(7)$. $\sigma(2)$ kan vara 2, 6 eller 3. $\sigma(6)$ och $\sigma(3)$ bestäms av det.

Det ger det sökta antalet, $|\Sigma| = 8 \cdot 3 = 24$.

Eftersom $(1\ 4)$ kommuterar med π gäller $\sigma \in \Sigma \Leftrightarrow \sigma(1\ 4) \in \Sigma$ och $(1\ 4)^2 = id$, så $\sigma \mapsto \sigma(1\ 4)$ ger en bijektion $\Sigma \rightarrow \Sigma$. Den tar udda till jämna och omvänt, så det finns lika många udda som jämna permutationer i Σ , dvs 12 av varje.

Svar a: Det finns 24 sådana σ , b: 12 av dem är udda.

12) Vi söker (a, 2p) antalet fördelningar av 10 (identiska) vita, 11 (identiska) svarta och 12 (särskiljbara) kulörta kulor i tre (särskiljbara) lådor och (b, 3p) antalet utan någon tom låda.

Lösning:

De vita kulorna kan fördelas på tre lådor på $\binom{10+2}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66$ sätt och de svarta på $\binom{11+2}{2} = \frac{13 \cdot 12}{2 \cdot 1} = 78$ sätt (oordnat val med upprepning). De kulörta kulorna kan fördelas på 3^{12} sätt (ordnat val med upprepning). Totala antalet fördelningar blir $66 \cdot 78 \cdot 3^{12}$.

Låt A_i vara fördelningarna med låda $i = 1, 2, 3$ tom. I b) skall vi från antalet ovan dra bort $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$, som vi beräknar med principen om inklusion och exklusion. Som nyss $|A_i| = \binom{10+1}{1} \cdot \binom{11+1}{1} \cdot 2^{12} = 11 \cdot 12 \cdot 2^{12}$, $i = 1, 2, 3$, $|A_i \cap A_j| = 1$ om $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$ (alla i samma låda) och $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$ (alla lådor kan inte vara tomma). Det ger $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 3 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 2^{12} - 3 \cdot 1 + 0$ och det sökta antalet $66 \cdot 78 \cdot 3^{12} - 3 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 2^{12} + 3 \cdot 1 - 0$.

Svar a: $66 \cdot 78 \cdot 3^{12} = 5148 \cdot 3^{12} (= 2\,735\,858\,268)$ sätt,

b: $66 \cdot 78 \cdot 3^{12} - 3 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 2^{12} + 3 = 5148 \cdot 3^{12} - 396 \cdot 2^{12} + 3 (= 2\,734\,236\,255)$ sätt.

13) Vi skall finna (a, 1p) ett och (b, 4p) alla $n \in \mathbb{N}$ med $\phi(n) = 6$.

Lösning:

Låt $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ vara primfaktoriseringen av n (alla p_i olika och alla $e_i > 0$). Då är enligt känd sats $\phi(n) = p_1^{e_1-1}(p_1 - 1) \cdots p_k^{e_k-1}(p_k - 1)$. Vi använder att $6 = 2 \cdot 3$ och entydig faktorisering i primtal. **Om** faktorn 3 ingår i en av $p_i - 1$ måste det handla om $p_i = 7$ ($3 + 1$ är inget primtal och $p_i = 3k + 1$ med $k > 2$ gör $\phi(n)$ för stort), som ger $p_i - 1 = 6$, så övriga faktorer i $\phi(n)$ måste vara 1. Enda ytterligare möjligheten är en faktor $2 - 1$. Det ger $n = 7, 14$ som två möjligheter. **Om** å andra sidan 3 ingår bland faktorerna $p_i^{e_i-1}$, måste det vara 3^{2-1} och den tillhörande faktorn $3 - 1 = 2$ ger lösningen $n = 3^2 = 9$. Åter är enda ytterligare möjligheten en faktor 2, dvs $n = 18$.

Svar a: T.ex. $n = 7$, **b:** alla sådana n är **7, 9, 14, 18**.
