

Lösningar fiktiv TENA SF1630(/1631) DISKRET MATEMATIK, D3
oktober 2013

Tryckfel kan förekomma.

1a) (1p) En **stig** i en graf $G = (V, E)$ är en vandring som inte upprepar något hörn, dvs en hörnföljd $v_1, v_2, \dots, v_k$ sådan att $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ för alla $i = 1, 2, \dots, k-1$ och $v_i \neq v_j$ om $i \neq j$.

b) (1p) Ett **träd** är en sammanhängande graf utan cykler.

c) (1p) **Eulers polyederformel** säger att om en plan, sammanhängande graf har v hörn, e kanter och delar in planet i r ytor (inklusive den yttre, obegränsade, ytan), så gäller $v - e + r = 2$.

2a) (1p) Ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att det skall finnas $x, y \in \mathbb{Z}$ med $mx + ny = c$ är att $\text{sgd}(m, n) \mid c$.

b) (1p) **Fermats lilla sats** säger att om p är ett primtal, $x \in \mathbb{Z}$ och $p \nmid x$ så $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

c) (1p) En **inversfunktion** till $f : X \rightarrow Y$ är en funktion $g : Y \rightarrow X$ som uppfyller att $fg = id_Y$ och $gf = id_X$ (fg är sammansättningen av f och g , id_A är identitetsfunktionen på A).

3a) (1p) Antalet **injektioner** $f : X \rightarrow Y$ då $|X| = k$, $|Y| = n$ är $(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

b) (1p) Man kan skriva $r = k_1 + \dots + k_n$ med $k_i \geq 0$ på $\binom{n+r-1}{n-1} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!}$ sätt.

c) (1p) **Möbiusfunktionen** ges för $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ av $\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{om } n = 1, \\ 0 & \text{om } t^2 \mid n, \text{ något } t > 1, \\ (-1)^r & \text{om } n \text{ en produkt av } r \text{ olika primtal.} \end{cases}$

4a) (1p) **Produkten** $\pi\sigma$ av $\pi, \sigma \in S_n$ är sammansättningen av dem som funktioner, $(\pi\sigma)(k) = \pi(\sigma(k))$.

b) (1p) π^{-1} har samma **cykelstruktur** som π (alla cykler vänds ju).

c) (1p) Om $\pi \in S_n$ innehåller a cykler av jämn längd och b av udda längd är π en jämn permutation omm a är jämn, udda omm a är udda.

5) (3p) En sammanhängande graf med 15 hörn är ritad utan korsande kanter på ytan av en sfär. Grafen delar in sfärens yta i 6 områden. Vi söker antalet kanter i grafen.

Lösning:

Eftersom antalet hörn $v = 15$ och antalet ytor $r = 6$ ger Eulers polyederformel $v - e + r = 2$ (grafens är ju plan och sammanhängande), där e är antalet kanter, att $e = 19$.

Svar: Grafen har 19 kanter.

6) (3p) Vi söker alla $x \in \mathbb{Z}$ med $x \equiv 2 \pmod{9}$, $x \equiv 3 \pmod{10}$, $x \equiv 5 \pmod{11}$.

Lösning:

Eftersom vi bara skall lösa ett problem (en uppsättning högerled), kan vi enklast göra så: Första ekvationen ger att $x = 2 + 9s$, för något $s \in \mathbb{Z}$. Andra ekvationen ger villkor för s , $2 + 9s \equiv_{10} 3$, så $s \equiv_{10} 1$, så $s = -1 + 10t$, för något $t \in \mathbb{Z}$. Tredje ger $2 + 9(-1 + 10t) \equiv_{11} 5$, så $t \equiv_{11} 6$, så $t = 6 + 11u$, där $u \in \mathbb{Z}$ är godtyckligt. Det ger $x = 2 + 9s = 2 + 9(-1 + 10t) = -7 + 90t = -7 + 90(6 + 11u) = 533 + 990u$.

Svar: Alla lösningar ges av $x = 533 + 990u$, där u är ett godtyckligt heltal.

7) (3p) Vi söker antalet sätt Pelle kan välja ut 5 av 10 böcker, så att minst en av 3 favoritböcker finns med.

Lösning:

Totala antalet sätt att välja ut 5 av 10 är $\binom{10}{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3} = 252$. Från dessa dras antalet sätt att välja utan någon favorit, $\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$, $252 - 21 = 231$.

Svar: Det sökta antalet sätt är 231.

(Går också med inklusion/exklusion, A_i : mängden val som innehåller favoritbok i . Längre, men samma resultat.)

8) $\pi \in S_7$ ges av $\pi(1)=5, \pi(2)=7, \pi(3)=2, \pi(4)=3, \pi(5)=1, \pi(6)=6, \pi(7)=4$.

Vi söker (a, 1p) π på cykelform, (b, 1p) $\pi^{-1}\sigma$, då $\sigma = (1\ 4\ 2\ 7\ 3)(5\ 6)$ och (c, 1p) pariteten för $\pi^{111}\sigma^{-13}\pi^{18}\sigma^{28}\pi^{13}$.

Lösning:

$\pi(1)=5, \pi(5)=1, \pi(2)=7, \pi(7)=4$ etc. ger $\pi = (1\ 5)(2\ 7\ 4\ 3)(6)$.

$\pi^{-1}\sigma = (1\ 5)(2\ 3\ 4\ 7)(1\ 4\ 2\ 7\ 3)(5\ 6) = (1\ 7\ 4\ 3\ 5\ 6)(2)$

π är jämn, σ är udda (som antalen jämnlängds-cykler), så produkten är udda (udda st udda faktorer).

Svar a: $\pi = (1\ 5)(2\ 7\ 4\ 3)(6)$, b: $\pi^{-1}\sigma = (1\ 7\ 4\ 3\ 5\ 6)$, c: produkten är udda.

9) (4p) Från grafen $G = (V, E)$ kan man ta bort k st kanter så att den resulterande grafen fortfarande är sammanhängande. Vi skall visa att G innehåller minst k olika cykler.

Lösning:

Induktionsbevis. Basen $k = 0$ är klar.

Antag att påståendet stämmer för $k = r$ och att man kan ta bort $r + 1$ kanter från grafen G så att den återstående grafen är sammanhängande. Låt en av dessa kanter vara uv och kalla grafen som fås då uv tas bort för G' . Då finns det en stig i G' från u till v (sammanhängande graf), tillsammans med uv blir det en cykel C i G . Enligt induktionsantagandet finns det r olika cykler i G' och ingen av dem är C eftersom de inte innehåller uv . G innehåller alltså minst $r + 1$ olika cykler och induktionssteget är klart.

Påståendet följer med induktion, **saken är klar**.

10) (4p) Vi skall visa att om $5 \mid n$ finns inget heltal x med $x^6 + 3 \equiv 0 \pmod{n}$.

Lösning:

Enligt Fermats lilla sats är $x^5 \equiv_5 x$, så $x^6 + 3 \equiv_5 x^2 + 3$. Genom att pröva alla möjligheter $x \equiv_5 0, 1, 2, 3, 4$ fås $x^2 + 3 \equiv_5 3, 4, 2, 2, 4 \not\equiv_5 0$ för alla $x \in \mathbb{Z}$. Om $5 \mid n$ gäller $a \equiv_n b \Rightarrow a \equiv_5 b$ ($(5 \mid n \text{ och } n \mid (b - a)) \Rightarrow 5 \mid (b - a)$). Påståendet följer. **Saken är klar**.

11) A och B är disjunkta mängder med $|A| = r \geq 1, |B| = s \geq 1$.

Vi skall (a, 2p) visa att q_n , antalet ord av längd n med ett udda antal förekomster av element från A , i alfabetet $A \cup B$ uppfyller $q_n = (s - r)q_{n-1} + r(r + s)^{n-1}$ för $n = 1, 2, \dots$ och $q_0 = 0$ och (b, 2p) bestämma q_n för $n = 0, 1, 2, \dots$

Lösning:

$q_0 = 0$, ty det enda ordet av längd 0 innehåller inte ett udda antal från A .

$q_n, n > 0$, räknar två typer av ord, med element i A eller i B sist ($A \cap B = \emptyset$), så

$q_n = s \cdot (\text{antalet av längd } n-1, \text{ udda från } A) + r \cdot (\text{antalet av längd } n-1, \text{ jämnt från } A) =$
 $= sq_{n-1} + r((r + s)^{n-1} - q_{n-1}) = (s - r)q_{n-1} + r(r + s)^{n-1}$ för $n = 1, 2, \dots$

Homogena ekvationen $q_n = (s - r)q_{n-1}$ har karakteristisk ekvation $x = s - r$, så allmän lösning $q_n = C(s - r)^n$. Ansatsen $q_n = a(r + s)^n$ för partikulärlösning till inhomogena ger $a(r + s)^n = (s - r)a(r + s)^{n-1} + r(r + s)^{n-1}$, så $a(r + s) = a(s - r) + r$ och $a = \frac{1}{2}$.

Ekvationens allmänna lösning är alltså $q_n = \frac{1}{2}(r + s)^n + C(s - r)^n$.

$q_0 = 0$ ger $C = -\frac{1}{2}$, så den sökta lösningen är $q_n = \frac{1}{2}((r + s)^n - (s - r)^n)$.

Svar a: Visat ovan, b: $q_n = \frac{1}{2}((r + s)^n - (s - r)^n)$.

12) Vi söker (a, 2p) antalet sätt att inkvartera sex personer i fyra rum så att inget rum blir tomt och (b, 3p) antalet om dessutom Tjatte, Knatte och Fnatte alla skall bo i olika rum.

Lösning:

Sökta antalet i a) = antalet surjektioner från en 6-mängd till

en 4-mängd $= 4! \cdot S(6, 4) = 24 \cdot 65 = 1560$,

($S(6, 4) = 65$ enligt "Stirlings triangel" till höger).

			1		
		1		1	
1		3		1	
	7		6		1
		25		10	
			65		

Låt A_1 vara mängden fördelningar utan tomma rum där Tjatte och Knatte delar rum, A_2 då Knatte och Fnatte och A_3 då Fnatte och Tjatte delar.

Det sökta antalet är då (antalet i a) - $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$.

Som i a) fås (två som delar rum kan ses som en person) $|A_1| = |A_2| = |A_3| = 4! \cdot S(5, 4) = 24 \cdot 10$ och $|A_1 \cap A_2| = |A_2 \cap A_3| = |A_3 \cap A_1| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 4! \cdot S(4, 4) = 24 \cdot 1$.

Principen om inklusion och exklusion ger då att det sökta antalet är:

$$24 \cdot 65 - 3 \cdot 24 \cdot 10 + 3 \cdot 24 \cdot 1 - 24 \cdot 1 = 24(65 - 30 + 3 - 1) = 24 \cdot 37 = 888.$$

(Alternativt: Tjatte, Knatte och Fnatte kan få olika rum på $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ sätt (injektion 3-mängd till 4-mängd). Övriga tre personer kan placeras ut på $4^3 = 64$ sätt, av vilka $3^3 = 27$ dock lämnar det obesatta rummet tomt och därför är otillåtna. Det sökta antalet blir $24 \cdot (64 - 27) = 24 \cdot 37$.)

Svar a: 1560 sätt, b: 888 sätt.

13) Var och en av personerna i den ändliga mängden X vill läsa vissa av böckerna i mängden Y . Vi skall (a, 2p) representera detta med en bipartit graf och ange ett nödvändigt och tillräckligt villkor på grafen för att alla personer skall kunna låna dels en och dels (b, 3p) k böcker (som de vill läsa). (Olika personer kan inte låna samma bok.)

Lösning:

Låt $G = (X \cup Y, E)$ vara den bipartita grafen med hörnmängder X och Y och en kant mellan person $x (\in X)$ och bok $y (\in Y)$ precis om x vill läsa y . Villkoret för att de önskade lånen skall vara möjliga är då att det finns en delmängd E_k till E så att varje $x \in X$ ingår i precis k kanter i E_k och varje $y \in Y$ ingår i högst en kant i E_k (a) är fallet $k = 1$).

Genom att betrakta en ny graf G' , som fås genom att "dela upp" varje hörn i X i k st kopior och också "dela upp" alla kanter som går till dem, kan villkoret formuleras som att G' skall ha en fullständig matchning. Genom att tillämpa Halls villkor för existens av en sådan, fås (med bokens beteckningar) att ett nödvändigt och tillräckligt villkor (uttryckt i G) för att lånen skall vara möjliga, är att $|J(A)| \geq k|A|$ för alla $A \subseteq X$.

Svar: Grafen enligt ovan. Villkoret är $|J(A)| \geq k|A|$ för alla $A \subseteq X$. (a) är fallet $k = 1$).