

Fiktiv TENA i kurs
SF1630(/SF1631), DISKRET MATEMATIK för D, F
nåndagen den 37 nihilber 2013, klockan 14.00–19.00.

Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.

Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Maximal poäng på de olika delarna är T: 12p, P1: 12p, P2: 12p, P3: 10p.

För **godkänt** krävs minst 9p på var och en av delarna T och P1.

För betyg A–E krävs **dels** godkänt och **dels** poäng enligt:

För betyg	A	B	C	D	E	
krävs totalt	37	32	-	25	-	poäng
varav	-	12	8	-	-	på delarna P2 och P3 tillsammans
och	5	-	-	-	-	på del P3

Omdömet FX, dvs rätt att komplettera för betyg E, ges för skrivning som inte är godkänd, men nått minst 18p totalt.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.

Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL T

Godkänd uppgift 1 på lsiA ht13 ger automatiskt full poäng på uppgift i ($i = 1, 2, 3$) och det ger då ingen ytterligare poäng att lösa den uppgiften på skrivningen.

- 1a) (1p) Vad menas med en **stig** (eng. path) i en graf $G = (V, E)$?
- b) (1p) Hur definieras att en graf $G = (V, E)$ är ett **träd** (eng. tree)?
- c) (1p) Formulera **Eulers polyederformel** för plana, sammanhängande grafer. (Glöm inte att förklara införda beteckningar.)
- 2a) (1p) Ange ett (enkelt) nödvändigt och tillräckligt villkor på $m, n, c \in \mathbb{Z}$ för att det skall finnas $x, y \in \mathbb{Z}$ med $mx + ny = c$.
- b) (1p) Formulera **Fermats lilla sats** (den om vissa potenser av heltal).
- c) (1p) Ange definitionen av en **inversfunktion** till $f : X \rightarrow Y$.
- 3a) (1p) Hur många **injektioner** $f : X \rightarrow Y$ finns det då $|X| = k$, $|Y| = n$?
- b) (1p) På hur många sätt kan man skriva $r = k_1 + \dots + k_n$ med $k_i \geq 0$?
- c) (1p) Hur definieras **möbiusfunktionen** $\mu(n)$ för $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$?
- 4a) (1p) Om $\pi, \sigma \in S_n$, vad menas med deras **produkt**, $\pi\sigma$?
- b) (1p) Hur bestäms π^{-1} :s **cykelstruktur** (typ), då man känner π :s?
- c) (1p) Permutationen π innehåller a cykler av jämn längd och b av udda längd. Hur avgörs om π är **udda** eller **jämn**?

DEL P1

Godkänd uppgift 2 på lsiA ht13 ger automatiskt full poäng på uppgift 4 + i ($i = 1, 2, 3$) och det ger då ingen ytterligare poäng att lösa den uppgiften på skrivningen.

5) (3p) En sammanhängande graf med 15 hörn är ritad utan korsande kanter på ytan av en sfär. Grafen delar in sfärens yta i 6 områden.

Hur många kanter (eng. edges) har grafen?

6) (3p) Finn alla heltal x som uppfyller att

$$x \equiv 2 \pmod{9}, \quad x \equiv 3 \pmod{10}, \quad x \equiv 5 \pmod{11}.$$

7) (3p) Pelle har 10 olika böcker om diskret matematik. Tre av dem är hans favoritböcker, alla kategorier. På hur många sätt kan han välja ut 5 av de 10 böckerna, så att minst en av favoriterna finns med?

Svaret får innehålla heltal, faktorer, potenser och de fyra enkla räknesätten.

8) $\pi \in S_7$ ges av $\pi(1)=5, \pi(2)=7, \pi(3)=2, \pi(4)=3, \pi(5)=1, \pi(6)=6, \pi(7)=4$.

a) (1p) Skriv π på cykelform.

b) (1p) $\sigma \in S_7$ ges av $\sigma = (1\ 4\ 2\ 7\ 3)(5\ 6)$. Finn $\pi^{-1}\sigma$ på cykelform.

c) (1p) Är $\pi^{111}\sigma^{-13}\pi^{18}\sigma^{28}\pi^{13}$ en jämn eller en udda permutation?

DEL P2

9) (4p) Låt $G = (V, E)$ vara en graf där man kan ta bort k st kanter så att den resulterande grafen fortfarande är sammanhängande.

Visa att G innehåller minst k olika cykler.

10) (4p) Visa att om $5 \mid n$ finns inget heltal x sådant att $x^6 + 3 \equiv 0 \pmod{n}$.

11a) (2p) Låt $A = \{a_1, \dots, a_r\}$ och $B = \{b_1, \dots, b_s\}$ vara disjunkta mängder (dvs $A \cap B = \emptyset$) med $|A| = r \geq 1$, $|B| = s \geq 1$.

Visa att q_n , antalet ord av längd n med ett udda antal förekomster av element från A , i alfabetet $A \cup B$ uppfyller

$$q_n = (s - r)q_{n-1} + r(r + s)^{n-1} \quad \text{för } n = 1, 2, \dots \quad \text{och } q_0 = 0.$$

b) (2p) Bestäm q_n för $n = 0, 1, 2, \dots$ (får lösas utan att a) lösts.)

DEL P3

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

12) Sex personer kommer till ett hotell med fyra lediga rum.

a) (2p) På hur många sätt kan de tilldelas rum så att inget rum blir tomt?

b) (3p) På hur många sätt kan det ske om tre av personerna (Tjatte, Knatte och Fnatte) alla måste bo i olika rum?

Svaret får innehålla heltal, faktorer, potenser och de fyra enkla räknesätten.

13) Var person i mängden X (ändlig) vill läsa vissa av böckerna i mängden Y .

a) (2p) Representera detta på lämpligt sätt med en bipartit graf och ange ett nödvändigt och tillräckligt villkor på grafen för att alla personer skall kunna låna en bok (som de vill läsa). (Olika personer kan inte låna samma bok.)

b) (3p) Finn ett nödvändigt och tillräckligt villkor på grafen för att alla personer skall kunna låna k böcker (som de vill läsa).
