

**Lösningar tentan TEN1 SF1631(/SF1630) DISKRET MATEMATIK, D3 m.fl.,
13 mars 2014**

Tryckfel kan förekomma.

1) (4p) Vi söker $n \geq 3$ så att K_n innehåller en hamiltoncykel och en sluten väg utan gemensamma kanter med hamiltoncykeln och som går exakt en gång genom övriga kanter.

Lösning: K_n innehåller alltid en hamiltoncykel (eftersom det går kanter mellan alla par av hörn, kan man gå cykliskt genom alla hörn). Om man tar bort kanterna i den, återstår en graf som är sammanhängande om $n \geq 5$ (om $n = 3$ saknar den kanter) och varje hörn har valens $n - 3$. Problemet är när det finns en sluten eulerväg i den återstående grafen. Det gör det som bekant omm alla hörn har jämn valens, dvs

Svar: Sådana finns omm n är udda och ≥ 5 .

(om man godtar en tom väg som en sluten väg, går också $n = 3$ bra.)

2) (4p) Vi söker alla heltal x, y sådana att $39x + 45y = 12$.

Lösning: Då ekvationen divideras med 3 fås den ekvivalenta $13x + 15y = 4$.

Euklides algoritmen ger $15 = 1 \cdot 13 + 2$, $13 = 6 \cdot 2 + 1$ (så $\text{sgd}(13, 15) = 1$ och) $1 = 13 - 6 \cdot 2 = 13 - 6(15 - 1 \cdot 13) = 7 \cdot 13 - 6 \cdot 15$. Multiplikation med 4 ger att $\begin{cases} x_0 = 28 \\ y_0 = -24 \end{cases}$ är en lösning till ekvationen. (x, y) uppfyller då ekvationen precis om $13(x - x_0) + 15(y - y_0) = 0$, dvs $13(x - x_0) = -15(y - y_0)$, så precis om båda leden är en gemensam multipel till 13 och 15. $\text{mgm}(13, 15) = 13 \cdot 15$ (ty $\text{sgd}(13, 15) = 1$), så $x - x_0 = 15a$, för något $a \in \mathbb{Z}$. Det ger $y - y_0 = -13a$, vilket kan hyfsas till $x = -2 + 15k$, $y = 2 - 13k$, $k \in \mathbb{Z}$ godtyckligt ($k = a + 2$).

Svar: Alla lösningar ges av $\begin{cases} x = -2 + 15k, \\ y = 2 - 13k, \end{cases}$ för godtyckligt $k \in \mathbb{Z}$.

3) Vi söker antalen sätt att (a, 2p) ställa upp en skolklass med 11 flickor och 9 pojkar i ett led, utan två flickor längst fram och (b, 2p) om Lasse och Bosse dessutom inte får stå intill varandra.

Lösning: a. Låt X vara mängden av alla placeringar i ledet och A_1 mängden placeringar med två flickor längst fram. Då är det sökta antalet: $|X| - |A_1| = 20! - 11 \cdot 10 \cdot 18! = (20 \cdot 19 - 11 \cdot 10) \cdot 18! = 270 \cdot 18!$ (11 möjliga flicka ett, 10 flicka två, resten kan ordnas på 18! sätt).

b. Med $A_2 =$ mängden placeringar med Lasse och Bosse intill varandra ger principen om inklusion och exklusion det sökta antalet (antalet placeringar med Lasse och Bosse intill varandra = 2 · antalet med Lasse och Bosse som en pojke): $|X \setminus (A_1 \cup A_2)| = |X| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2| = 20! - 11 \cdot 10 \cdot 18! - 2 \cdot 19! + 2 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 17! = (20 \cdot 19 \cdot 18 - 11 \cdot 10 \cdot 18 - 2 \cdot 19 \cdot 18 + 2 \cdot 11 \cdot 10) \cdot 17! = 4396 \cdot 17!$.

Svar a: På $270 \cdot 18!$ (= 1 728 640 900 546 560 000) sätt,

b: På $4396 \cdot 17!$ (= 1 563 601 933 910 016 000) sätt.

4) (4p) Gruppen $G = U(\mathbb{Z}_{18})$ verkar på mängden $X = \mathbb{Z}_{18}$ med multiplikation. Vi söker alla banor.

Lösning: Banorna är $Gx = \{gx \mid g \in G\}$ för olika $x \in X$.

G innehåller precis de $x \in \mathbb{Z}_{18}$ som har $\text{sgd}(x, 18) = 1$ (de inverterbara, enligt känd sats), dvs $G = \{1, 5, 7, 11, 13, 17\}$.

Man finner $G0 = \{0\}$, $G1 = \{1, 5, 7, 11, 13, 17\} = G$, $G2 = \{2, 10, 14, 4, 8, 16\}$, $G3 = \{3, 15, 3, 15, 3, 15\} = \{3, 15\}$. Eftersom $4 \in G2$ är $G4 = G2$ och p.s.s. är $G5 = G1 = G$, men $G6 = \{6, 12, 6, 12, 6, 12\} = \{6, 12\}$ och $G9 = \{9, 9, 9, 9, 9, 9\} = \{9\}$. Alla G :s element finns med i precis en av dessa, så det är alla banorna.

Svar: Banorna är $\{0\}$, $\{1, 5, 7, 11, 13, 17\}$, $\{2, 4, 8, 10, 14, 16\}$, $\{3, 15\}$, $\{6, 12\}$, $\{9\}$.

5) (4p) Vi söker $\text{sgd}(f(x), g(x))$ i $\mathbb{Z}_5[x]$, då $f(x) = x^4 + x^3 + 4x^2 + 3x + 4$, $g(x) = x^4 + x^2 + 3x + 1$.

Lösning: Euklides algoritmen. Man finner att $f(x) = 1 \cdot g(x) + (x^3 + 3x^2 + 3) = f(x) + h(x)$ och med polynomdivision $g(x) = (x + 2)h(x)$. Det betyder att $\text{sgd}(f(x), g(x)) = h(x) = x^3 + 3x^2 + 3$.

Svar: $\text{sgd}(f(x), g(x)) = x^3 + 3x^2 + 3$.

6) (5p) G är en grupp och $A \subseteq G$, $A \neq \emptyset$.

Vi skall visa att om $G_A = \{g \in G \mid ga \in A \text{ för alla } a \in A\}$ måste $|G_A| \leq |A|$.

Lösning: Beviset grundar sig på att $g \in G_A$ bestäms helt av sin verkan på ett enda a .

Tag ett $a \in A$ (finns, ty $A \neq \emptyset$). Om $g_1, g_2 \in G_A$ och $g_1a = g_2a$ är $g_1 = g_2$ (ty $a \in G$, multiplicera med a^{-1} från höger). Det betyder att $f_a : G_A \rightarrow A$ som ges av $f_a(g) = ga$ är en injektion, så $|G_A| \leq |A|$ (postfacksprincipen). **Saken är klar.**

7) $\pi \in S_9$ uppfyller $\pi(1)=6, \pi(2)=7, \pi(3)=1, \pi(4)=9, \pi(5)=5, \pi(6)=3, \pi(7)=2, \pi(8)=8$.

Vi skall (a, 1p) finna $\pi(9)$ och skriva π i cykelnotation, (b, 1p) avgöra om π är jämn eller udda, (c, 3p) finna antalet $\sigma \in S_9$ som uppfyller $\sigma\pi = \pi^{-1}\sigma$.

Lösning: a. $\pi(9) = 4$ (π är en surjektion, så alla värden 1, 2, ..., 9 antas).

Eftersom $\pi(1) = 6, \pi(6) = 3, \pi(3) = 1$ etc, fås $\pi = (1\ 6\ 3)(2\ 7)(4\ 9)(5)(8)$.

b. Eftersom π har ett jämnt antal (2) cykler av jämn längd är det en jämn permutation.

c. $\sigma\pi = \pi^{-1}\sigma \Leftrightarrow \sigma\pi\sigma^{-1} = \pi^{-1}$. $\sigma\pi\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(6)\sigma(3))(\sigma(2)\sigma(7))(\sigma(4)\sigma(9))(\sigma(5))(\sigma(8))$. För att den skall vara samma som $\pi^{-1} = (1\ 3\ 6)(2\ 7)(4\ 9)(5)(8)$ krävs att i -cykel svarar mot i -cykel osv. $\sigma(1)$ kan vara 1, 3 eller 6 (3 möjligheter), $\sigma(6), \sigma(3)$ bestäms entydigt av $\sigma(1)$. $\sigma(2)$ kan vara 2, 7, 4 eller 9 (4 möjligheter), den bestämmer $\sigma(7)$, varefter $\sigma(4)$ har två möjliga värden, sedan är $\sigma(9)$ bestämd. $\sigma(5)$ kan vara 5 eller 8, $\sigma(8)$ då bestämd. Multiplikationsprincipen ger totalt $3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 48$ möjliga σ .

Svar a: $\pi = (1\ 6\ 3)(2\ 7)(4\ 9)(5)(8)$, **b:** π är jämn, **c:** Det finns 48 sådana σ .

8) (5p) p och q är olika primtal. Vi söker alla $k \in \mathbb{N}$ sådana att $x^k \equiv_{p \cdot q} x$ för alla $x \in \mathbb{Z}$.

Lösning: Eftersom p och q är relativt prima: $x^k \equiv_{p \cdot q} x \Leftrightarrow (x^k \equiv_p x \text{ och } x^k \equiv_q x)$ (entydig faktorisering i $\mathbb{Z}$ ger $p \cdot q \mid (x^k - x) \Leftrightarrow (p \mid (x^k - x) \text{ och } q \mid (x^k - x))$, så kongruensen gäller för alla $x \in \mathbb{Z}$ omm $x^k = x$ för alla x i både $\mathbb{Z}_p$ och $\mathbb{Z}_q$. För x inverterbart i $\mathbb{Z}_p$ (dvs $x \neq 0$) är $x^k = x$ ekvivalent med $x^{k-1} = 1$, dvs $(p-1) \mid (k-1)$ (eftersom $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \cdot)$ är en cyklisk grupp av ordning $p-1$ finns ett element av ordning $p-1$ och allas ordningar är delare till det (känd följd av Lagranges sats). För $x = 0$ duger alla $k > 0$. Med motsvarande för q fås att de sökta k är precis de som uppfyller både $(p-1) \mid (k-1)$ och $(q-1) \mid (k-1)$, så alla $k = n \cdot \text{mcm}(p-1, q-1) + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Svar: Alla $k = n \cdot \text{mcm}(p-1, q-1) + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

9) (6p) Vi skall visa att $3r_3 + 2r_4 + r_5 - r_7 - 2r_8 - \dots = \sum_{i=3}^{\infty} (6-i)r_i = 12$ för en plan, sammanhängande, 3-reguljär graf med r_i st ytor med i kanter ($i = 3, 4, \dots$).

Lösning: Om vi adderar alla hörnens valenser räknar vi varje kant två gånger, så $3v = 2e$. Om vi adderar antalet kanter vid varje yta räknar vi p.s.s. varje kant två gånger, så $\sum_i ir_i = 2e$. Totala antalet ytor är $r = \sum_i r_i$.

För en plan, sammanhängande graf gäller Eulers polyederformel $v - e + r = 2$, så $3v - 3e + 3r = 6$. Med $3v = 2e$ ger det $-e + 3r = 6$, så $6r - 2e = 12$. Insättning av r och e ger $6 \sum_i r_i - \sum_i ir_i = \sum_i (6-i)r_i = 12$. **Saken är klar.**

10) Vi söker (a, 1p) $|R|$ och (b, 5p) alla lösningar till ekvationen $t^2 + 7t + 9 = 0$ i ringen $R = \mathbb{Z}_{11}[x]/(x^2 + 1)$. Vi kallar restklassen som innehåller x för α .

Lösning: a. Varje restklass i R innehåller precis ett polynom av grad ≤ 1 (och alla sådana ligger förstås i sin restklass), så elementen i R kan skrivas $a + b\alpha$, där olika $a, b \in \mathbb{Z}_{11}$ ger olika element. Det ger att $|R| = 11^2 = 121$.

b. $t^2 + 7t + 9 = t^2 + 18t + 9 = t^2 + 18t + 4 + 5 = (t + 9)^2 + 5$, så ekvationen kan skrivas $(t + 9)^2 + 5 = 0$. $t + 9$ måste alltså vara ett element i R med kvadraten $-5 = 6$. Kvadraterna av elementen i $\mathbb{Z}_{11} = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$ är $0, 1, 4, 9, 5, 3, 3, 5, 9, 4, 1$, alla skilda från 6, men eftersom $x^2 = (x^2 + 1) - 1$ är $\alpha^2 = -1$ och $(4\alpha)^2 = (7\alpha)^2 = 5(-1) = -5 = 6$, så $t + 9 = 4\alpha, 7\alpha$ ger lösningar till ekvationen: $t = -9 + 4\alpha, -9 + 7\alpha = 2 \pm 4\alpha$.

Det finns inget element i $\mathbb{Z}_{11}$ med kvadrat -1 , så $x^2 + 1$ är irreducibelt (andragradspolynom utan nollställe) och R alltså en kropp. Det följer att en andragradsekvation kan ha högst två nollställen i R och vi har funnit alla lösningar.

Svar a: $|R| = 121$, **b:** Alla lösningar är $t = 2 \pm 4\alpha$.
