

Matematik, KTH

B.Ek

Tentamen TEN1 (OBS!) i kursen
SF1631, DISKRET MATEMATIK för D3 m.fl.
torsdagen den 13 mars 2014, klockan 8.00–13.00.

DENNA SKRIVNING KAN BARA SKRIVAS AV DEM SOM
FÖRSTAGÅNGSREGISTRERADES PÅ KURS SF1631
LÄSÅRET 2011–12 (eller betydligt tidigare)!

Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.

Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Högsta möjliga poäng på skrivningen är 47p. Till den läggs bonus från lappskrivningar ht 2013, högst 12p.

Betygsgränser:

För betyg	A	B	C	D	E	
krävs	42	35	29	24	20	poäng (inklusive bonus)

17–19 p ger omdömet Fx, dvs rätt att delta i en komplettering för betyg E.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade. Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL I

1) (4p) För vilka $n \geq 3$ gäller att den fullständiga grafen (eng. complete graph) K_n innehåller dels en hamiltoncykel och dels en sluten väg som saknar gemensamma kanter med hamiltoncykeln och går exakt en gång genom var och en av grafens övriga kanter?

2) (4p) Finn alla heltal x och y som uppfyller

$$39x + 45y = 12.$$

3a) (2p) En skolklass med 11 flickor och 9 pojkar skall ställa upp sig i ett led. Det får inte stå två flickor längst fram. På hur många sätt kan de ställa sig?

b) (2p) På hur många sätt kan det ske om Lasse och Bosse (pojkar i klassen) dessutom inte får stå intill varandra?

Svaren får innehålla heltal, faktulteter, potenser och de fyra enkla räknesätten.

4) (4p) Låt gruppen $G = U(\mathbb{Z}_{18})$, de inverterbara elementen i ringen $(\mathbb{Z}_{18}, +, \cdot)$, verka på mängden $X = \mathbb{Z}_{18}$ med ringens multiplikation.

Finn alla banor för G 's verkan på X .

5) (4p) Finn $\text{sgd}(f(x), g(x))$ (eng. gcd) i $\mathbb{Z}_5[x]$, då

$$f(x) = x^4 + x^3 + 4x^2 + 3x + 4 \text{ och } g(x) = x^4 + x^2 + 3x + 1.$$

Vänd!

DEL II

6) (5p) Låt G vara en grupp och $A \subseteq G$, $A \neq \emptyset$.

Visa att om $G_A = \{g \in G \mid ga \in A \text{ för alla } a \in A\}$ måste $|G_A| \leq |A|$.

7) Permutationen $\pi \in S_9$ uppfyller

$$\pi(1)=6, \pi(2)=7, \pi(3)=1, \pi(4)=9, \pi(5)=5, \pi(6)=3, \pi(7)=2, \pi(8)=8.$$

a) (1p) Finn $\pi(9)$ och skriv π i cykelnotation.

b) (1p) Ange, med motivering, om π är en jämn eller en udda permutation.

c) (3p) Finn antalet $\sigma \in S_9$ som uppfyller $\sigma\pi = \pi^{-1}\sigma$.

8) (5p) Låt p och q vara olika primtal. Finn alla $k \in \mathbb{N}$ sådana att

$$x^k \equiv x \pmod{p \cdot q} \text{ för alla } x \in \mathbb{Z}.$$

För full poäng krävs att man både visar att kongruensen med de funna k gäller för alla x och att det för alla andra k finns x så att den inte gäller.

DEL III

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

9) (6p) Låt $G = (V, E)$ vara en plan, sammanhängande, 3-reguljär graf med r_i st ytor med i kanter ($i = 3, 4, \dots$). Visa att

$$3r_3 + 2r_4 + r_5 - r_7 - 2r_8 - \dots = \sum_{i=3}^{\infty} (6-i)r_i = 12$$

(Vi betraktar bara enkla grafer, dvs utan loopar och multipla kanter.)

10) Betrakta ringen $R = \mathbb{Z}_{11}[x]/(x^2 + 1)$ av restklasser $\pmod{x^2 + 1}$ och beteckna restklassen som innehåller x för α .

a) (1p) Hur många element finns det i R , dvs vad är $|R|$?

b) (5p) Finn alla $t \in R$ som uppfyller $t^2 + 7t + 9 = 0$.

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.